

פתרון מבחן מועד ד' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 18/06/23

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.

מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cdot (1 - e^x)}{\cos(3x) - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{(3x)^2}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{2}{3^2} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

ב. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x} = \left\{ \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} \right\} = 0$$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n + n^2}$

$$0 < \frac{n!}{n^n + n^2} < \frac{n!}{n^n}$$

לכן לפי סנדוויץ' מספיק להראות שגבול הביטוי מימין שואף לאפס, את זה נעשה עם כלל המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

כיוון שגבול המנה קטן מאחד, הסדרה שואפת לאפס וסיימנו.

א. חשבו את $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$.

$$\int \arctan(\sqrt{x}) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int 2t \arctan(t) dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f' = 2t \quad g = \arctan(t) \\ f = t^2 \quad g' = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = t^2 \arctan(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$\frac{t^2}{1+t^2}$ היא פונקציה רציונאלית.

דרגת המונה שווה לדרגת המכנה לכן נתחיל מחילוק פולינומים, אבל במקום זאת נעזר בטריק שיוביל אותנו לאותו המקום:

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

והביטוי שקיבלנו הוא כבר שבר חלקי, ואין צורך לפרק לסכום של שברים חלקיים.

נחזור לאינטגרל:

$$= t^2 \arctan(t) - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = t^2 \arctan(t) - t + \arctan(t) + C =$$

$$= x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 \int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2[\sqrt{x}]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 - 2\sqrt{t} = 2$$

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x-1)(x+1)$$

זו פרבולה צוחקת, ולכן הנגזרת חיובית בתחומים

$$(-\infty, -1), (1, \infty)$$

ושלילית בתחום

$$(-1, 1)$$

$$(-\infty, -1], [1, \infty)$$

ויורדת בתחום

$$[-1, 1]$$

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2} = 8x - 8$

ראשית נבצע חילוק פולינומים

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 2x - 4 \\ \hline 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8 \mid x + 2 \\ 2x^4 + 4x^3 \\ \hline 2x^2 - 8 \\ 2x^2 + 4x \\ \hline -4x - 8 \\ -4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

סה"כ גילינו כי

$$\frac{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8}{x + 2} = 2x^3 + 2x - 4$$

כעת אחרי ההכנה המקדימה, נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8}{x + 2} - (8x - 8) = 2x^3 + 2x - 4 - (8x - 8) = 2x^3 - 6x + 4$$

כעת נחקור פונקציה זו, היא הפונקציה מסעיף א'.

כלומר אנו יודעים את תחומי העלייה והירידה שלה כבר, נותר לבדוק את הערכים בקצוות.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 6x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^3}_{\rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = -\infty$$

$$h(-1) = 8$$

לכן בתחום $(-\infty, -1]$ לפי ערך הביניים, כיוון שהפונקציה רציפה ויש נקודות מעל ומתחת לציר, יש חיתוך.

כיוון שהפונקציה מונוטונית, יש חיתוך יחיד בתחום זה.

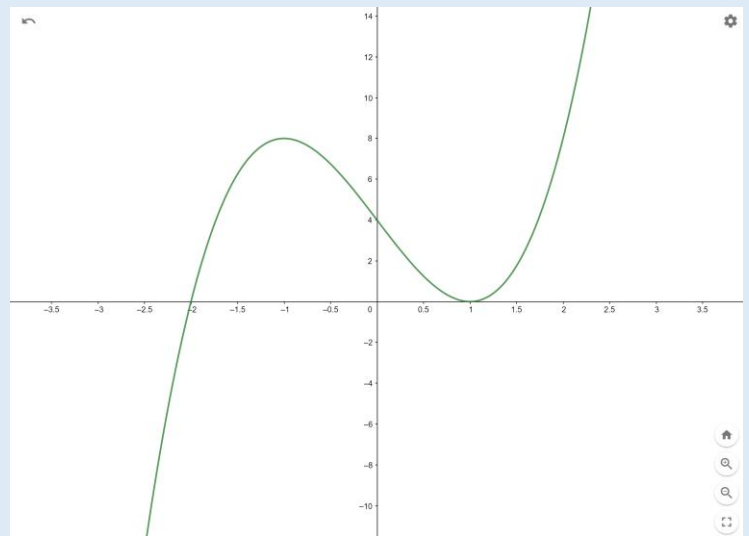
$$h(1) = 0$$

ויחד עם המונוטוניות של שני התחומים הנותרים $[-1, 1]$, $[1, \infty)$ כיוון שהחיתוך עם הציר הוא בנק' המשותפת לשני התחומים הוא החיתוך היחיד בשניהם גם יחד.

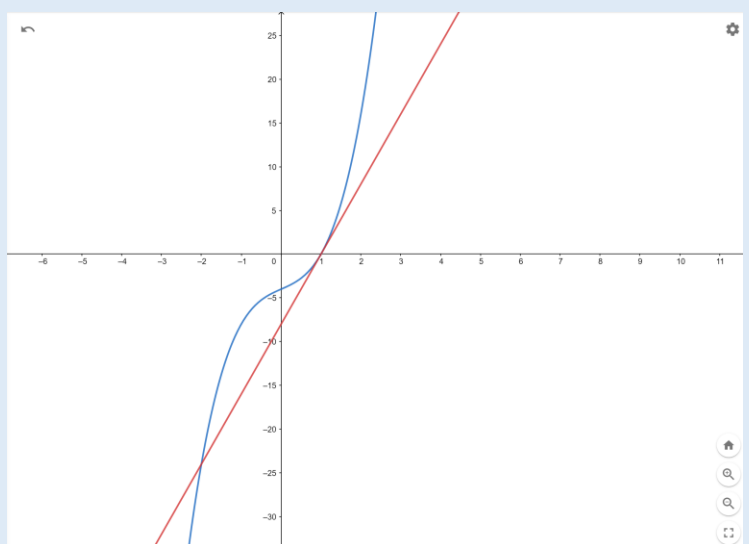
סה"כ שני חיתוכים ולכן שני פתרונות למשוואה המקורית.

קצת ציורים:

הציור של הפונקציה $h(x)$:



שרטוט שתי הפונקציות מצידו המשוואה המקורית:



4. תהי f פונקציה הגזירה בנקודה x_0 , ונביט בפונקציה $g(x) = f(|x|)$.
 א. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $g(x)$ גם גזירה בנקודה x_0 .

הפרכה: $f(x) = x$ גזירה ב $x_0 = 0$

ואילו $g(x) = f(|x|) = |x|$ אינה גזירה ב $x_0 = 0$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $x_0 \neq 0$ אזי הפונקציה $g(x)$ גם גזירה בנקודה x_0 .

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x) = \sqrt{-x}$ הגזירה בנקודה $x_0 = -1$

לעומת זאת, $g(x) = f(|x|) = \sqrt{-|x|}$, כלל אינה מוגדרת בנקודה $x_0 = -1$.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$, המקיימת כי $a_1 > 1$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ראשית נשים לב כי

$$a_{n+1} - a_n = a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n}$$

לכן אם נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n > 1$ נקבל כי ההפרש חיובי והסדרה אכן עולה. נעשה זאת באינדוקציה:

בדיקה: $a_1 > 1$

יהי n עבורו $a_n > 1$ צריך להוכיח כי $a_{n+1} > 1$

צריך להוכיח

$$2a_n - \frac{1}{a_n} > 1$$

כיוון שנתון כי $a_n > 1$ מותר לכפול בו בשני הצדדים לקבל אי שיוויון שקול

$$2a_n^2 - 1 > a_n$$

$$a_n^2 - a_n + a_n^2 - 1 > 0$$

$$a_n(a_n - 1) + a_n^2 - 1 > 0$$

וזה אכן נכון לפי הנחת האינדוקציה.

(היה אפשר להראות שאי השיוויון מתקיים גם בעזרת פרבולה, אבל זה מה שקפץ לי לעין.)

ב. חשבו את גבול הסדרה.

אם הסדרה חסומה, היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא עולה, נסמן גבול זה ב $a_n \rightarrow L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - \frac{1}{a_n}$$

כיוון שהסדרה עולה נובע כי $L \geq a_1 > 1$, ולכן בפרט $L \neq 0$ ולכן $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{L}$

סה"כ נקבל כי

$$L = 2L - \frac{1}{L}$$

$$L^2 - 2L + 1 = 0$$

$$(L - 1)^2 = 0$$

ולכן $L = 1$, בסתירה לכך כי $L > 1$

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא עולה מתקיים כי $a_n \rightarrow \infty$.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

ראשית נציג את הסדרה באמצעות סימן הסכימה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

כעת נפתח את הביטוי לצורה של סכום רימן

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

זו סדרה סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי משפט מתכנסת לאינטגרל המסוים

$$a_n \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2)$$

ב. קרבו את $\sqrt[3]{e}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נעשה בקירוב טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x$ סביב נקודת ההשקה המצוייה $x_0 = 0$ בנקודה הרצוייה $x = \frac{1}{3}$ כיוון ש

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

השגיאה היא

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{3} - 0\right)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)! 3^{n+1}}$$

כאשר $0 < c < \frac{1}{3}$

כיוון שהפונקציה e^x מונוטונית עולה,

$$0 < e^c < e^{\frac{1}{3}}$$

נחסום מלמעלה על ידי ביטוי מוכר:

$$e^c < e^{\frac{1}{3}} < e < 4$$

(הרי הוכחנו בכיתה כי $2 < e < 4$)

ולכן

$$|R_n| = R_n = \frac{e^c}{(n+1)! 3^{n+1}} < \frac{4}{(n+1)! 3^{n+1}}$$

(שימו לב שהשגיאה תמיד חיובית ולכן הערך המוחלט נעלם.)

עבור $n = 3$ נקבל כי

$$R_3 < \frac{4}{4! \cdot 3^4} < \frac{1}{100}$$

לבסוף, פולינום הטיילור של e^x ידוע כמובן:

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

ולכן

$$\sqrt[3]{e} \approx P_3\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!}$$