גיאומטריה אלגברית I - מועד ב, 2009

① (א) $A=\{x^2-y^3+y=0\}\subset\{w_2\neq0\}\subset\mathbb{P}^2$

$w_2\neq 0 \to x=\frac{w_0}{w_2},\ y=\frac{w_1}{w_2}$

$\Rightarrow \frac{w_0^2}{w_2^2}-\frac{w_1^3}{w_2^3}+\frac{w_1}{w_2}=0 \Rightarrow w_0^2w_2-w_1^3-w_1w_2^2=0$

$\to \bar{A}=\{\bar{w}: w_0^2w_2-w_1^3-w_1w_2^2=0\}$

② $X=A\times\mathbb{P}^1$.

(א) X לא פרויקטיבית (=סגורה), אחרת

$X=\bar{X}=\overline{A\times\mathbb{P}^1}=\bar{A}\times\bar{\mathbb{P}}^1=\bar{A}\times\mathbb{P}^1$

וזה $A\times\mathbb{P}^1\neq\bar{A}\times\mathbb{P}^1$ כי [illegible] $(0,0,1)\in\bar{A}\not\subset\{w_2\neq0\}$.

(ב) X לא אפינית, לפי משפט - $\{\text{אפינית}\}\times\mathbb{P}^1$ אף פעם לא אפיני.

③ $\varphi:\bar{A}\to\mathbb{P}^1$

$\varphi(w_0,w_1,w_2)=(w_1,w_2)$

(א) כן. אמנם מתקיים $\varphi(1,0,0)=\bar{0}$, אבל יש הגדרה שקולה ה-

$(w_1:w_2)=(w_1\cdot w_1^2 : w_2\cdot w_1^2)=(w_0^2w_2-w_1w_2^2 : w_2w_1^2)=$

$=(w_0^2-w_1w_2,\ w_1^2)=\tilde{\varphi}(w_0,w_1,w_2)$

ומתקיים $\tilde{\varphi}(1,0,0)=(1,0)\neq\bar{0}$, לכן $\mathrm{Dom}\,\varphi=\bar{A}$.

(ב). לא. [illegible] כי המקור של נקודה הוא לא נקודה:

$\varphi^{-1}(1,0)=\{(w_0,1,0)\}$

4) לפי הגדרה $\mathbb{C}[A] = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle x^2-y^3+y\rangle}$

יהי $f\in\mathbb{C}[A]$, אז

$$f=\sum_{i,j} a_{ij}\cdot x^i y^j = \sum a_{ij}\cdot x^{2i}y^j + \sum a_{ij}\, x^{2i+1}\cdot y^j =$$

$$= \sum a_{ij}(y^3-y)^{2i} y^j + x\sum a_{ij}(y^3-y)^{2i}\cdot y^j$$

רק כל $f\in\mathbb{C}[A]$ הוא בצורה $P_1(y)+xP_2(y)$.
מצד שני, כל פולינום כזה ניתן להציג כנ"ל, ולכן

$$\mathbb{C}[A] = \{P_1(y)+xP_2(y) : P_1,P_2\in\mathbb{C}[y]\}$$

5) כל Conic הוא בצורה

$$a_{00}w_0^2+a_{11}w_1^2+a_{22}w_2^2+a_{01}w_0w_1+a_{02}w_0w_2+a_{12}w_1w_2=0$$

רק $(a_{00},\dots,a_{12})\in\mathbb{P}^5$. התנאים הם:

$$\left\{\begin{array}{l}(1,0,0)\longrightarrow a_{00}=0\\ (0,0,1)\longrightarrow a_{22}=0\end{array}\right\}$$

ולכן

$$U=\{a_{00}=0\}\cap\{a_{22}=0\}=$$

$$=V(\langle a_{00}\rangle)\cap V(\langle a_{22}\rangle)=V(\langle a_{00}\rangle+\langle a_{22}\rangle)=$$

$$=V(\langle a_{00},a_{22}\rangle)=\{a_{00}=0,\ a_{22}=0\}$$

(a) זו הקבוצה פרויקטיבית.

~~(b) [illegible]~~

(b) היא אי פריקה כי $\langle a_{00},a_{22}\rangle$ ראשוני (אני מניחה)