# חשבון אינפי 1

## פתרונות למועד א

18 בפבואר 2016

שאלה 1

**משפט 1.1** תהי פונקציה $f$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אזי היא מקבלת שם מינימום ומקסימום.

**הוכחה:** בהרצאה. ■

שאלה 2

**טענה 1.2** ננתח את הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$. נראה שהטור הנ"ל מתכנס בהחלט. למען השלמות נעשה זאת בשתי דרכים:

(א) לפי מבחן ההשוואה,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+62n+1}{|4n^5-26n^2+7|} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{66n^2}{4n^5-26n^4} = 33\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3-26n^2}$$

ומאחר שהטור החוסם את הטור שלנו מתכנס (למה?) אזי ההתכנסות היא בהחלט.

(ב) לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם $\sum\frac{1}{n^3}$, מקבלים כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2-62n-1}{4n^5-26n^2+7}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-62n^4-n^3}{4n^5-26n^2+7} = \frac{3}{4} < 1$$

ולכן הטורים מתכנסים יחדיו. שימו לב כי המבחן מופעל על $-\sum\frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$ שמתכנס אם"ם הטור המקורי מתכנס וזאת בכדי שנקבל טור חיובי.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. זהו טור חיובי ולכן קצת מנוון לדבר כאן על התכנסות בתנאי/בהחלט. יש דרכים רבות,

(א) שימו לב ש

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots n \Rightarrow n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

ומכאן נוכל להפעיל את מבחן ההשוואה לטורים חיוביים,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ובפרט הטור מתבדר.

(ב) שימו לב כי $\sqrt[n]{n!}\ge 1$ אז לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

(ג) מבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}\geq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\left[m=n^2\right]=\lim_{m\to\infty}\sqrt[2m]{m}=1$$

ולכן בפרט האיבר הכללי לא שואף ל-0 ולכן הטור מתבדר.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{1}{10n+9\sin n}$ - אין התכנסות בהחלט כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+9\sin n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+9}$$

אבל הטור מימין הוא בסה"כ הטור ההרמוני שידוע שמתבדר. נראה עכשיו התכנסות בתנאי: נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{10x+9\sin x}$ בקטע $\left(2,\infty\right)$ ונראה שהיא יורדת שם,

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{-10-9\cos x}{\left(10x+9\sin x\right)^2}\leq-\frac{1}{\left(10x+9\sin x\right)^2}<0$$

ומאחר שהנגזרת בקטע זה תמיד שלילית, הפונקציה תמיד יורדת. מכאן שהסדרה $a_n=\frac{1}{10n+9\sin n}$ מונוטונית יורדת ונסיים לפי מבחן לייבניץ.

## שאלה 3

**טענה 1.3** תהי $a_n\to a\in\mathbb{R}$ אזי גם

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}\to a$$

**הוכחה:** בעזרת הגדרת הגבול. יהי $\varepsilon>0$ נתון. מאחר ש- $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש

$$\forall n>n_0,\quad\left|a_n-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

סדרה מתכנסת היא חסומה ולכן יש גם $M>0$ כך ש

$$\forall n\in\mathbb{N},\left|a_n\right|<M.$$

כעת, נגדיר את הסדרה

$$c_n:=\frac{2n_0M}{n}.$$

קל לראות כי

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n_0M}{n}=2n_0M\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

ולכן יש $n_1\in\mathbb{N}$ כך ש

$$\forall n>n_1,\quad\left|c_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

נסכם: ניקח $n_2=\max\left\{n_1,n_0\right\}$ אזי עבורו יתקיים:

$$\begin{aligned}\forall n>n_2,\quad\left|b_n-a\right|&=\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}a_n}{n}-a\right|\\&=\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(a_n-a\right)\right|}{n}\end{aligned}$$

ולפי אי"ש המשולש המוכלל,

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{n}|a_n-a|}{n}\\
&=\sum_{k=1}^{\min\{n_0,n_1\}}\frac{|a_n-a|}{n}+\sum_{k=\min\{n_0,n_1\}+1}^{n}\frac{|a_n-a|}{n}\\
&:=S_1+S_2
\end{aligned}$$

נחסום עתה את שני המחוברים. את המחובר הראשון, לפי החסימות של $a_n$ וההתכנסות של $c_n$,

$$S_1\leq\sum_{k=1}^{\min\{n_0,n_1\}}\frac{M}{n}=\frac{M\min\{n_0,n_1\}}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

ובנוגע למחובר השני,

$$\begin{aligned}
S_2&\leq\sum_{k=\min\{n_0,n_1\}+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2n}\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

ובסה"כ,

$$|b_n-a|\leq S_1+S_2\leq\varepsilon.$$

■

שאלה 4

**הגדרה 1.4** (פונקציה רבמ"ש) יהי $A\subset\mathbb{R}$. אומרים שהפונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה במידה שווה בתחום $A$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in A$

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

**טענה 1.5** תהי $f$ רבמ"ש על $\mathbb{R}$ אזי $g(x)=f(x+5776)-f(x)$ היא פונקציה חסומה.

**הוכחה:** ניקח לה"כ ומטעמי נוחות גרידא $\varepsilon=1$ . מאחר ש$f$ רבמ"ש על $\mathbb{R}$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

ומכאן ינבע ע"י הפעלה מספר פעמים את אי"ש המשולש כי לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|g(x)|&=|f(x+5776)-f(x)|\\
&=\left|f(x+5776)-f\left(x+5776-\frac{\delta}{2}\right)+f\left(x+5776-\frac{\delta}{2}\right)-f(x)\right|\\
&\leq\left|f(x+5776)-f\left(x+5776-\frac{\delta}{2}\right)\right|+\left|f\left(x+5776-\frac{\delta}{2}\right)-f(x)\right|\\
&\leq\ldots\\
&\leq\epsilon\cdot5776\cdot\left\lceil\frac{2}{\delta}\right\rceil\\
&=5776\cdot\lceil\frac{2}{\delta}\rceil:=M
\end{aligned}$$

ואכן קיבלנו ש$g$ היא פונקציה חסומה. ■

שאלה 5

טענה 1.6 תהי $f$ רציפה ב$[a,b]$וגזירה בכל נקודה פנימית של קטע זה. נניח כי לכל $c \in (a,b)$, $f'(c) \neq 1$ אזי ל-$f$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת.

הוכחה: בשלילה יש לכל הפחות שתי נקודות שבת בקטע זה, כך ש

$$f(d) = d, f(e) = e$$

(לה"כ $d < e$) אולם אז לפי משפט Lagrange (בדקו שכל התנאים מתקיימים),

$$\exists c \in (d,e) \subseteq (a,b) : f'(c) = \frac{f(d) - f(e)}{d - e} = \frac{d - e}{d - e} = 1$$

בסתירה להנחה. מכאן נובע הדרוש. אגב, לא תמיד קיימת נקודת שבת (קחו לדוגמה פונקציה קבועה בקטע נכון). ■