

חשבון אינפי 1

פתרונות למועד א

18 בפבואר 2016

שאלה 1

משפט 1.1 תהי פונקציה f רציפה בקטע סגור $[a, b]$ אזי היא מקבלת שם מינימום ומקסימום.

הוכחה: בהרצאה.

שאלה 2

טענה 1.2 ננתח את הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$. נראה שהטור הנ"ל מתכנס בהחלט. למען השלמות נעשה זאת בשתי דרכים:

(א) לפי מבחן ההשוואה,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+62n+1}{|4n^5-26n^2+7|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{66n^2}{4n^5-26n^4} = 33 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3-26n^2}$$

ומאחר שהטור החוסם את הטור שלנו מתכנס (למה?) אזי ההתכנסות היא בהחלט.

(ב) לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם $\sum \frac{1}{n^3}$, מקבלים כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2-62n-1}{4n^5-26n^2+7}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5-62n^4-n^3}{4n^5-26n^2+7} = \frac{3}{4} < 1$$

ולכן הטורים מתכנסים יחדיו. שימו לב כי המבחן מופעל על $\sum \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$ - שמתכנס אם"ם הטור המקורי מתכנס וזאת בכדי שנקבל טור חיובי.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. זהו טור חיובי ולכן קצת מנוון לדבר כאן על התכנסות בתנאי/בהחלט. יש דרכים רבות.

(א) שימו לב ש

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots n \Rightarrow n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

ומכאן נוכל להפעיל את מבחן ההשוואה לטורים חיוביים,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ובפרט הטור מתבדר.

(ב) שימו לב כי $\sqrt[n]{n!} \geq 1$ אז לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

(ג) מבחן השורש (בגירסה של טורים/סדרות):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n} = [m = n^2] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m]{m} = 1$$

ובפרט האיבר הכללי לא שואף ל-0 ולכן הטור מתבדר.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{10n+9 \sin n} \text{ - אין התכנסות בהחלט כי}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+9 \sin n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+9}$$

אבל הטור מימין הוא בסה"כ הטור ההרמוני שידוע שמתבדר. נראה עכשיו התכנסות בתנאי: נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{1}{10x+9 \sin x}$ בקטע $(2, \infty)$ ונראה שהיא יורדת שם,

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-10 - 9 \cos x}{(10x + 9 \sin x)^2} \leq -\frac{1}{(10x + 9 \sin x)^2} < 0$$

ומאחר שהנגזרת בקטע זה תמיד שלילית, הפונקציה תמיד יורדת. מכאן שהסדרה $a_n = \frac{1}{10n+9 \sin n}$ מונוטונית יורדת ונסיים לפי מבחן לייבניץ.

שאלה 3

טענה 1.3 תהי $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ אזי גם

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} \rightarrow a$$

הוכחה: בעזרת הגדרת הגבול. יהי $\varepsilon > 0$ נתון. מאחר ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\forall n > n_0, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

סדרה מתכנסת היא חסומה ולכן יש גם $M > 0$ כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < M.$$

כעת, נגדיר את הסדרה

$$c_n := \frac{2n_0 M}{n}.$$

קל לראות כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n_0 M}{n} = 2n_0 M \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ולכן יש $n_1 \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\forall n > n_1, \quad |c_n| = \frac{2Mn_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

נסכם: ניקח $n_2 = \max\{n_1, n_0\}$ אזי עבורו יתקיים:

$$\begin{aligned} \forall n > n_2, \quad |b_n - a| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} - a \right| \\ &= \frac{|\sum_{k=1}^n (a_k - a)|}{n} \end{aligned}$$

ולפי אי"ש המשולש המוכלל,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |a_k - a|}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\max\{n_0, n_1\}} \frac{|a_k - a|}{n} + \sum_{k=\max\{n_0, n_1\}+1}^n \frac{|a_k - a|}{n} \\ &:= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

נחסום עתה את שני המחוברים. את המחובר הראשון, לפי החסימות של a_n וההתכנסות של c_n ,

$$S_1 \leq \sum_{k=1}^{\max\{n_0, n_1\}} \frac{2M}{n} = \frac{2M \max\{n_0, n_1\}}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ובנוגע למחובר השני,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{k=\min\{n_0, n_1\}+1}^n \frac{\varepsilon}{2n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ובסה"כ,

$$|b_n - a| \leq S_1 + S_2 \leq \varepsilon.$$

■

שאלה 4

הגדרה 1.4 (פונקציה רבמ"ש) יהי $A \subset \mathbb{R}$. אומרים שהפונקציה $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה בתחום A אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

טענה 1.5 תהי f רבמ"ש על \mathbb{R} אזי $g(x) = f(x + 5776) - f(x)$ היא פונקציה חסומה.

הוכחה: ניקח לה"כ ומטעמי נוחות גרידא $\varepsilon = 1$. מאחר ש f רבמ"ש על \mathbb{R} , קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

ומכאן ינבע ע"י הפעלה מספר פעמים את אי"ש המשולש כי לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |f(x + 5776) - f(x)| \\ &= \left| f(x + 5776) - f\left(x + 5776 - \frac{\delta}{2}\right) + f\left(x + 5776 - \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \left| f(x + 5776) - f\left(x + 5776 - \frac{\delta}{2}\right) \right| + \left| f\left(x + 5776 - \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \dots \\ &\leq \varepsilon \cdot 5776 \cdot \left\lceil \frac{2}{\delta} \right\rceil \\ &= 5776 \cdot \left\lceil \frac{2}{\delta} \right\rceil := M \end{aligned}$$

■

ואכן קיבלנו ש g היא פונקציה חסומה.

טענה 1.6 תהי f רציפה ב $[a, b]$ וגזירה בכל נקודה פנימית של קטע זה. נניח כי לכל $c \in (a, b)$, $f'(c) \neq 1$ אזי ל- f יש לכל היותר נקודת שבת אחת.

הוכחה: בשלילה יש לכל הפחות שתי נקודות שבת בקטע זה, כך ש

$$f(d) = d, f(e) = e$$

(לה"כ $d < e$) אולם אז לפי משפט Lagrange (בדקו שכל התנאים מתקיימים),

$$\exists c \in (d, e) \subseteq (a, b) : f'(c) = \frac{f(d) - f(e)}{d - e} = \frac{d - e}{d - e} = 1$$

בסתירה להנחה. מכאן נובע הדרוש. אגב, לא תמיד קיימת נקודת שבת (קחו לדוגמה פונקציה קבועה בקטע נכון). ■