תרגיל תיאורטי מספר 2

1. תהי $A \in F^{n\times n}$. הוכח/הפרך :

א. אם יש $n \in N$ כך ש-A^n הפיכה, אז A הפיכה.

ב. אם $A^2 = I$ אז $A = \alpha I$ עבור $\alpha \in F$ כלשהו.

ג. אם לכל $b \in F^n$ יש פתרון למערכת $Ax=b$ אז A הפיכה.

ד. אם $A = B + C$ כך ש-B משולשית עליונה והפיכה ו-C משולשית תחתונה והפיכה אז A הפיכה.

ה. אם A הפיכה ויש B הפיכה כך ש- $AB = BA$ אז $AB = I$.

2. תהי $A \in F^{n\times n}$.

נסמן : $V = \text{span}\{R_1(A), \dots, R_n(A)\}$, $W = \{x \in F^n | Ax = 0\}$.

א. הוכח : W מרחב וקטורי.

ב. הוכח/הפרך : $V \cap W = \{0\}$

I. כאשר $F = \mathbb{R}$.

II. כאשר $F = \mathbb{C}$.

3. יהי V מרחב וקטורי, ותהיינה A, B תתי קבוצות של V .

א. הוכח : $span(A \cap B) \subseteq span(A) \cap span(B)$. באיזה מקרה מתקבל שוויון?

ב. הוכח : $span(A) \cup span(B)$ תת-מרחב וקטורי של V $\Leftrightarrow$ $span(A) \subseteq span(B)$ או $span(B) \subseteq span(A)$.

4. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$V = span\left\{\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

מצא מערכת משוואות לינארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק V.

5. האם הקבוצה $\{1+x^2+2x^3, 5+x+6x^2+13x^3, -3-x-3x^2-8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

תלויה לינארית? אם כן, מצא צירוף לינארי לא טריוויאלי שנותן 0, אחרת, הראה שהצירוף הלינארי היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

6. יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ בת"ל. הוכח כי הקבוצות הבאות בת"ל:

א. $\{v_1+v_3, v_2, v_3, v_4\}$.

ב. $\{v_1, \alpha v_2, v_3, v_4\}$ כאשר $\alpha \neq 0$ סקלר.

ג. $\{v_1, v_2, v_3+\alpha v_4, v_4\}$ כאשר α סקלר כלשהו.

7. נתבונן ב-$\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\mathrm{B} = \left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right\} \subseteq$

האם $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$? אם כן, מצא את הצירוף הלינארית המתאים.

8. נסמן: $A = \begin{pmatrix} i+1 & 0 \\ 2 & i-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, ו- $E_1, \dots, E_n$ מטריצות אלמנטריות

כך ש- $E_n \cdots E_1 A = I$ ו-n מינימלי.

א. הוכח: $span\{E_1, \dots, E_n\} \neq \mathbb{C}^{2\times 2}$.

ב. האם קיימת $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ עבורה $span\{E_1, \dots, E_n\} = \mathbb{C}^{2\times 2}$?

אם כן, מצא A כזו.