

### אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 8

1. מצאו את התאמת גלואה בין שדות הביניים של  $E/\mathbb{Q}$  לבין תת-החבורות של  $Gal(K/\mathbb{Q})$  באשר  $E$  שדה הפיצול של  $x^3 - 3$  (ציירו את הגרפים של תת-החבורות ושדות הביניים).
2. ציינו מיהם שדות הביניים  $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq K$  כך ש  $F/\mathbb{Q}$  הרחבת גלואה. אותו דבר כמו 1 עבור הפולינום  $f(x) = x^6 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ .
3. מצאו את חבורת גלואה ואת שדות הביניים של  $\mathbb{Q}[\rho_7]/\mathbb{Q}$ .
4. נניח שהרחבת גלואה  $K/F$  בעלת חבורת גלואה  $D_7$ . מצאו את מספר הרחבות הביניים, ואת מספר הרחבות הביניים שהן הרחבות גלואה של  $F$ .
5. הראו שההרחבה  $\mathbb{Z}_p(x, y)$  היא הרחבה סופית של  $\mathbb{Z}_p(x^p, y^p)$  אך היא אינה הרחבה פשוטה.
6. יהי  $f(x) \in F[x]$  מדרגה  $n$  כאשר  $F$  ממאפיין 0. נגדיר  $\Delta = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)$  כאשר  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  הם שורשי  $f(x)$ . הדיסקרימיננטה של  $f(x)$  היא  $D = \Delta^2$ . הראו:
  - א.  $D \in F$  (כיצד פועלת  $Gal(E/F)$  על  $D$  כאשר  $E$  שדה הפיצול של  $f(x)$ ).
  - ב. נניח ש  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  אי-פריק מדרגה 3. הראו ש  $D < 0$  אם ורק אם יש לפולינום שורש ממשי יחיד.
  - ג. הסיקו שאם  $D < 0$  עבור  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  אי-פריק מדרגה 3 אזי  $Gal(E/F) \cong S_3$ .