שיעורי בית 5

.

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1 e_2 הוכיחו:

   (א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]
   פתרון : מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

   $$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1)$$

   כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

   $$\phi(e_1)\phi(e_1) = \phi(e_1)$$

   בהופכי זה נקבל

   $$\phi(e_1) = e_2$$

   (ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.
   פתרון : נחשב

   $$e_2 = \phi(e_1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

   ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.

   (ג) שהגרעין המוגדר $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$ הוא תת־חבורה של G_1
   פתרון : בסעיף קודם ראינו כי $e_1 \in ker(\phi)$. נראה סגירות. $g, h \in ker(\phi)$ אזי

   $$\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} = e_1 e_1^{-1} = e_1$$

   ולכן $gh^{-1} \in ker(\phi)$

   (ד) שהתמונה $Im(\phi) = \{\phi(x) | \, x \in G_1\}$ היא תת־חבורה של G_2.
   פתרון : $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$. נראה סגירות. יהיו $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$כאשר $g, h \in G_1$ אזי

   $$\phi(g)\phi(h)^{-1} = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

   כי $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההומופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצא המומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3
פתרון : כיוון ש $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומורפיזים ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $\sigma \mapsto 1$ אזי σ צריכה לקיים $\sigma^3 = id$. לכן הומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1,2,3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1)\phi(1) = (1,2,3)^2 = (1,3,2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$
פתרון : הוכחה: יהא הומו' ϕ אזי עבור $\sigma_1 = (1,2)\,, \sigma_2 = (2,3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $2a = 0$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1,2,3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1,2,3)$ ו $(1,2)$ יוצרים של S_3 והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב S_3 ישלח ל־0 ולכן זהו ההומו' הטריאלי.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g,h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\,\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)\,(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו' ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in Aut(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומו'. הוכחה

$$\left(\phi^{-1}\right)(gh) = \left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕמשני הצדדים)

$$gh = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\right]\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = gh$$

(ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \to Aut(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.
הוכיחו כי Φ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = \left(I_x \circ I_y\right)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\left(\Phi\right) = \{x \in G : \ I_x = id\} = \left\{x \in G : \ \forall g \ xgx^{-1} = g\right\} = \{x \in G : \ \forall g \ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז $(Center)$ של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \to \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|} = sign(x)$. (לדוגמה: $\phi(3) = 1 \, \phi(-3) = -1$) הוכח ש ϕ המומורפיזם ומצא את הגרעין
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x,y\in G=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy)=\frac{xy}{|xy|}=\frac{xy}{|x||y|}=\frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|}=\phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi)=\{x\in G:\ sign(x)=1\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$$

(ב) : $\phi:(\mathbb{C}\backslash\{0\})\to\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ המוגדרות על ידי $\phi(a+ib)=a^2+b^2$.(לדוגמה: $\phi(1+2i)=5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין. איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

פתרון : נשים לב ש $\phi(z)=|z|^2$ כאשר $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. נמשיך להוכחה:

i. יהיו $z_1,z_2\in G=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1z_2)=\phi(z_1)\phi(z_1)$$

ואכן

$$\phi(z_1z_2)=|z_1z_2|=|z_1||z_2|=\phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi)=\{z\in G:\ |z|=1\}=\left\{e^{i\theta}|\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומורפיזים $\phi:S_n\to\{-1,1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma)=sign(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ

פתרון : נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi)=\{\sigma\in G:\ sign(\sigma)=1\}=A_n$$

5. תהא G חבורה סופית. נסמן ב $\sim$ את יחס הצמידות.

(א) יהא $x\in G$, ונסמן $H=C(x)=\{g\in G\ :\ gx=xg\}$ המרכז של x. נגדיר יחס שקילות נוסף על G:

$$g_1\equiv g_2\iff g_1^{-1}g_2\in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של x. כלומר

$$|{}^{G}\!/\!_{\equiv}|=|[x]_\sim|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f:{}^{G}/_{\equiv}\to[x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall[g]_{\equiv}\in{}^{G}/_{\equiv}:\ f([g]_{\equiv})=gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

פתרון : מוגדרות f. נניח $[g_1]_{\equiv}=[g_2]_{\equiv}$ צ"ל כי $f([g_1]_{\equiv})=([g]_{2\equiv})$ כלומר כי $g_1xg_1^{-1}=g_2xg_2^{-1}$. מהנתון נקבל כי $g_1^{-1}g_2\in H \iff g_1\equiv g_2$ כלומר כי $g_1^{-1}g_2x=xg_1^{-1}g_2$ ואז

$$g_1xg_1^{-1}=g_1\left(xg_1^{-1}g_2\right)g_2^{-1}=g_1\left(g_1^{-1}g_2x\right)g_2^{-1}=g_2xg_2^{-1}$$

בנוסף ברור כי $gxg^{-1}\in[x]_{\sim}$ לפי הגדרת מחלקת שקילות.

טענה f חח"ע. הוכחה נניח $f([g_1]_{\equiv})=([g]_{2\equiv})$ צ"ל $[g_1]_{\equiv}=[g_2]_{\equiv}$. מהנתון נסיק כי $g_1xg_1^{-1}=g_2xg_2^{-1}$. ע"י הכפלה ב g_1^{-1} משמאל ו g_2 מימין נקבל כי $xg_1^{-1}g_2=g_1^{-1}g_2x$ כלומר $g_1^{-1}g_2\in H$ שזה גורר $g_1\equiv g_2$ שזה שקול ל $[g_1]_{\equiv}=[g_2]_{\equiv}$.

טענה: f על. הוכחה: יהא $y\in[x]_{\sim}$ צריך למצוא לו מקור. מהגדרת מחלקת שקילות $y=gxg^{-1}$ עבור $g\in G$ כלשהוא. אזי מתקיים $f([g]_{\equiv})=gxg^{-1}=y$ וסיימנו.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל $x\in G$ מתקיים

$$|G|=k\,|[x]_{\sim}|$$

עבור kשלם כלשהוא.

פתרון : לפי משפט לגרנז וסעיף קודם נקבל כי

$$\frac{|G|}{|H|}=|{}^{G}/_{\equiv}|=|[x]_{\sim}|$$

ואז

$$|G|=|H|\cdot|[x]_{\sim}|$$

וסיימנו.

6. תהא G חבורה עם p^n איברים (p מספר ראשוני, n מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של G קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטראלי תמיד שייך למרכז..) כלומר

$$|Z(G)|>1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) Gהיא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה $\mathbb{Z}_p$ (שקילות מספרים שלמים מודולו p)
פתרון : לפי תכונה של יחס שקילות, G היא איחוד זר של מחלקות השקילות שלה. כלומר

$$G = \bigcup_{x \in G} [x]_\sim$$

ואם נבטל "כפילויות" נקבל איחוד זר. כלומר

$$G = \biguplus_{A \in G/\sim} A$$

ולכן

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A|$$

במילים: הגודל של G שווה לסכום גודלי מחלקות השקילות (הזרות).
כעת לכל $x \in Z(G)$ מתקיים כי $[x]_\sim = \{x\}$

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A| = \sum_{|A|=1} |A| + \sum_{|A|>1} |A| = |Z(G)| + \sum_{|A|>1} |A|$$

כעת, כל מחלקת צמידות A מקיימת כי $|A| = p^k$ עבור $0 \leq k \leq n$ (לפי סעיף קודם, גודל מחלקת צמידות מחלקת את גודל החבורה).
בנוסף לכל מחלקת צמידות A עם יותר מאיבר אחד מתקיים כי $|A| = p^k$ עבור $1 \leq k \leq n$ ולכן מודולו p מתקיים כי $|A| = 0 \mod p$ ולכן

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{|A|>1} |A| = p^n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p^k$$

כאשר α_k זה מספר מחלקות הצמידות מגודל p^k. ולכן מודולו p נקבל כי

$$|Z(G)| = 0 \mod p$$

ולכן $|Z(G)| = p^l$ עבור $l > 0$ או $|Z(G)| = 0$. כיוון ש $|Z(G)| > 0$ כי איבר היחידה שייך למרכז, נקבל כי גודל המרכז הוא $|Z(G)| = p^l$ עבור $l > 0$ כלומר במרכז יש לפחות p איברים.

.7

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.
כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$בעלות עוצמה שווה.
(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)
פתרון : טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_1H) = Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1} = \phi(g_2H)$.
אם $g_1H = g_2H$ אז $g_2^{-1}g_1 \in H$ כיוון ש H תת חבורה אז גם ההופכי $\left(g_2^{-1}g_1\right)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$ ואז $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.
חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$
מההנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן גם ההופכי $g_2^{-1}g_1 \in H$ ואז $g_1H = g_2H$
על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G :\ gH = Hg$$

פתרון : יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in G$ אזי $gH = H = Hg$ אחרת $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה מ H נקבל כי $gH = G\backslash H = Hg$