

## שיעורי בית 5

1. נתון  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה:  $e_1, e_2$ . הוכיחו:

(א)  $\phi(e_1) = e_2$  [רמז: חשב  $\phi(e_1 e_1)$ ]  
**פתרון:** מצד אחד  $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$  ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1) \phi(e_1)$$

כיוון ש  $\phi(e_2) \in G_2$  יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1) \phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

(ב)  $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$  לכל  $g \in G_1$ .  
**פתרון:** נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(g g^{-1}) = \phi(g) \phi(g^{-1})$$

ולכן  $\phi(g), \phi(g^{-1})$  הופכיים זה לזה.

(ג) שהגרעין המוגדר  $\ker(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = e_2\}$  הוא תת-חבורה של  $G_1$ .  
**פתרון:** בסעיף קודם ראינו כי  $e_1 \in \ker(\phi)$ . נראה סגירות. יהיו  $g, h \in \ker(\phi)$ .  
אזי

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(g) \phi(h)^{-1} = e_1 e_1^{-1} = e_1$$

ולכן  $gh^{-1} \in \ker(\phi)$

(ד) שהתמונה  $Im(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G_1\}$  היא תת-חבורה של  $G_2$ .  
**פתרון:**  $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$ . נראה סגירות. יהיו  $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$  כאשר  $g, h \in G_1$  אזי

$$\phi(g) \phi(h)^{-1} = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

כי  $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההומומורפיזם  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  המוגדר  $\phi(g) = e_2$  לכל  $g \in G_1$  נקרא ההומומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצא הומומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית  $\mathbb{Z}_3$  לחבורת התמורות  $S_3$ .  
**פתרון:** כיוון ש  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$  ציקלית ומתקיים  $3 \cdot 1 = 0$  אזי מספיק להגדיר הומומורפיזם ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח  $1 \mapsto \sigma$  אזי צריכה לקיים  $\sigma^3 = id$ . לכן הומומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1, 2, 3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1)\phi(1) = (1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ  $S_3$  ל  $\mathbb{Z}_3$ .  
**פתרון:** הוכחה: יהא הומו  $\phi$  אזי עבור  $\sigma_1 = (1, 2), \sigma_2 = (2, 3)$  מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה  $a \in \mathbb{Z}_3$  המקיים  $0 = 2a$  הוא  $a = 0$  ולכן  $\phi(\sigma_i) = 0$  ולכן

$$\phi((1, 2, 3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש  $(1, 2, 3)$  ו  $(1, 2)$  יוצרים של  $S_3$  והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב  $S_3$  ישלח ל-0 ולכן זהו ההומו הטריאלי.

3. תהא  $G$  חבורה. נגדיר  $Aut(G)$  להיות קבוצת כל ההומומורפיזם  $\phi : G \rightarrow G$  ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי  $Aut(G)$  חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.  
**פתרון:** הוכחה:

i. יהיו  $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$  אזי לכל  $g, h \in G$  מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה  $\phi_1 \circ \phi_2$  הומו' הפיך ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא  $id$  שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי: יהי  $\phi \in \text{Aut}(G)$  אזי נראה כי הפונקציה ההופכית  $\phi^{-1}$  היא גם הומ' הוכחה

$$(\phi^{-1})(gh) = (\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של  $\phi$  משני הצדדים)

$$gh = \phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)] = \phi [(\phi^{-1})(g)] \phi [(\phi^{-1})(h)] = gh$$

(ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

ע"י  $\Phi(x) = I_x$  כאשר  $I_x$  מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר  $I_x(g) = xgx^{-1}$ .

הוכיחו כי  $\Phi$  הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי  $I_x \in \text{Aut}(G)$ ) ומצאו  $\ker(\Phi)$  הוכחה:

i. יהיו  $x, y \in G$  אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא  $g \in G$  צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\Phi) = \{x \in G : I_x = \text{id}\} = \{x \in G : \forall g \ xgx^{-1} = g\} = \{x \in G : \forall g \ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז ( $\text{Center}$ ) של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה  $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \{-1, 1\}$  המוגדרת על ידי  $\phi(x) = \frac{x}{|x|}$

(לדוגמה:  $\phi(3) = 1$ ,  $\phi(-3) = -1$ ).  $\text{sign}(x)$  הוכח ש  $\phi$  המומומורפיזם ומצא את הגרעין

פתרון: הוכחה:

i. יהיו  $x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in G : \text{sign}(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

(ב) :  $\phi : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$  : המוגדרת על ידי  $\phi(a + ib) = a^2 + b^2$  (לדוגמה:  $\phi(1 + 2i) = 5$ ), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין

. איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

**פתרון :** נשים לב ש  $\phi(z) = |z|^2$  כאשר  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . נמשיך להוכיח:

i. יהיו  $z_1, z_2 \in G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ואכן

$$\phi(z_1 z_2) = |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{z \in G : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומומורפיזם  $\phi : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$  המוגדרת על ידי  $\phi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$ . מצא את

הגרעין של  $\phi$

**פתרון :** נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{\sigma \in G : \text{sign}(\sigma) = 1\} = A_n$$

5. תהא  $G$  חבורה סופית. נסמן ב  $\sim$  את יחס הצמידות.

(א) יהא  $x \in G$ , ונסמן  $H = C(x) = \{g \in G : gx = xg\}$  המרכז של  $x$ . נגדיר יחס שקילות נוסף על  $G$ :

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של  $x$ . כלומר

$$|G/\equiv| = |[x]_{\sim}|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f : G/\equiv \rightarrow [x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall [g]_{\equiv} \in G/\equiv : f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

**פתרון :** מוגדרות  $f$ . נניח  $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$  צ"ל כי  $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$  כלומר  $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$  כלומר  $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$  כי  $g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$  מהנתון נקבל כי  $g_1^{-1}g_2x = xg_1^{-1}g_2$  ואז  $g_1^{-1}g_2x = xg_1^{-1}g_2$  כי

$$g_1xg_1^{-1} = g_1(xg_1^{-1}g_2)g_2^{-1} = g_1(g_1^{-1}g_2x)g_2^{-1} = g_2xg_2^{-1}$$

בנוסף ברור כי  $gxg^{-1} \in [x]_{\sim}$  לפי הגדרת מחלקת שקילות.

טענה  $f$  חח"ע. הוכחה נניח  $f([g_1]_{\equiv}) = f([g_2]_{\equiv})$  צ"ל  $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$ . מהנתון נסיק כי  $g_1xg_1^{-1} = g_2xg_2^{-1}$ . ע"י הכפלה ב  $g_1^{-1}$  משמאל ו  $g_2$  מימין נקבל כי  $xg_1^{-1}g_2 = g_1^{-1}g_2x$  כלומר  $g_1^{-1}g_2 \in H$  שזה גורר  $g_1 \equiv g_2$  שזה שקול ל  $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$ .

טענה:  $f$  על. הוכחה: יהא  $y \in [x]_{\sim}$  צריך למצוא לו מקור. מהגדרת מחלקת שקילות  $y = gxg^{-1}$  עבור  $g \in G$  כלשהוא. אזי מתקיים  $f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1} = y$  וסיימנו.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל  $x \in G$  מתקיים

$$|G| = k |[x]_{\sim}|$$

עבור  $k$  שלם כלשהוא.

**פתרון :** לפי משפט לגרנז' וסעיף קודם נקבל כי

$$\frac{|G|}{|H|} = |G/\equiv| = |[x]_{\sim}|$$

ואז

$$|G| = |H| \cdot |[x]_{\sim}|$$

וסיימנו.

6. תהא  $G$  חבורה עם  $p^n$  איברים ( $p$  מספר ראשוני,  $n$  מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של  $G$  קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטראלי תמיד שייך למרכז..). כלומר

$$|Z(G)| > 1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) היא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה  $\mathbb{Z}_p$  (שקילות מספרים שלמים מודולו  $p$ )  
**פתרון** : לפי תכונה של יחס שקילות,  $G$  היא איחוד זר של מחלקות השקילות שלה. כלומר

$$G = \bigcup_{x \in G} [x]_{\sim}$$

ואם נבטל "כפילויות" נקבל איחוד זר. כלומר

$$G = \bigsqcup_{A \in G/\sim} A$$

ולכן

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A|$$

במילים: הגודל של  $G$  שווה לסכום גודלי מחלקות השקילות (הזרות).  
 כעת לכל  $x \in Z(G)$  מתקיים כי  $[x]_{\sim} = \{x\}$

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A| = \sum_{|A|=1} |A| + \sum_{|A|>1} |A| = |Z(G)| + \sum_{|A|>1} |A|$$

כעת, כל מחלקת צמידות  $A$  מקיימת כי  $|A| = p^k$  עבור  $0 \leq k \leq n$  (לפי סעיף קודם, גודל מחלקת צמידות מחלקת את גודל החבורה).  
 בנוסף לכל מחלקת צמידות  $A$  עם יותר מאיבר אחד מתקיים כי  $|A| = p^k$  עבור  $1 \leq k \leq n$  ולכן מודולו  $p$  מתקיים כי  $|A| \equiv 0 \pmod{p}$  ולכן

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{|A|>1} |A| = p^n - \sum_{k=1}^n \alpha_k p^k$$

כאשר  $\alpha_k$  זה מספר מחלקות הצמידות מגודל  $p^k$ . ולכן מודולו  $p$  נקבל כי

$$|Z(G)| \equiv 0 \pmod{p}$$

ולכן  $|Z(G)| = p^l$  עבור  $l > 0$  או  $|Z(G)| = 0$ . כיוון ש  $|Z(G)| > 0$  כי איבר היחידה שייך למרכז, נקבל כי גודל המרכז הוא  $|Z(G)| = p^l$  עבור  $l > 0$ . כלומר במרכז יש לפחות  $p$  איברים.

.7

(א) תהא  $G$  חבורה.  $H$  תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.  
 כלומר הקבוצות  $K_1 = \{gH \mid g \in G\}$   $K_2 = \{Hg \mid g \in G\}$  בעלות עוצמה שווה.  
 (הדרכה : הגדר  $\phi : K_1 \rightarrow K_2$  ע"י  $\phi(gH) = Hg^{-1}$ . הוכח כי  $\phi$  מוגדרת היטב, חח"ע ועל)  
**פתרון** : טענה  $\phi$  מוגדרת היטב

הוכחה: נניח  $g_1H = g_2H$  צ"ל כי  $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$   $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$   $\phi(g_1H) = Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1} = \phi(g_2H)$ .  
 אם  $g_1H = g_2H$  אז  $g_2^{-1}g_1 \in H$  כיוון ש  $H$  תת חבורה אז גם ההופכי  $(g_2^{-1}g_1)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$  ואז  $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ .  
 חח"ע: נניח  $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$  צ"ל  $g_1H = g_2H$   
 מההנחה  $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$  כלומר  $g_1^{-1}g_2 \in H$  כמו מקודם,  $H$  תת חבורה ולכן גם ההופכי  $g_2^{-1}g_1 \in H$  ואז  $g_1H = g_2H$   
 על: יהא  $Hg \in K_2$  המקור שלו יהיה  $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא  $G$  חבורה.  $H$  ת"ח. הוכח כי אם הסדר של  $G/H$  הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

**פתרון:** יהא  $g \in G$  צ"ל  $gH = Hg$ . אם  $g \in H$  אזי  $gH = H = Hg$   
 אחרת  $g \notin H$  ואז  $gH \neq H$  (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש  $Hg$  קוסט ימני שונה מ  $H$  נקבל כי  $gH = G \setminus H = Hg$