תרגיל 8

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\kappa)$ מרחבים טופולוגיים ותהי $f:X\to Y\times Z$. הוכיחו ש־f רציפה אם ורק אם $p_Y\circ f$ ו־$p_Z\circ f$ רציפות כאשר p_Y ו־p_Z הן ההטלות על Y ו־Z בהתאמה.

2. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\kappa)$ מרחבים טופולוגיים ותהי $f:X\times Y\to Z$. לכל $x_0\in X$ ו־$y_0\in Y$ נגדיר $f_X^{(y_0)}:X\to Z$ ו־$f_Y^{(x_0)}:Y\to Z$ לפי

$$f_X^{(y_0)}(x):=f(x,y_0),\ \ f_Y^{(x_0)}(y):=f(x_0,y)$$

הוכיחו או הפריכו: f רציפה אם ורק אם $f_Y^{(x_0)}$ ו־$f_X^{(y_0)}$ רציפות לכל $x_0\in X$ ו־$y_0\in Y$.

3. הוכיחו שאם (X,τ) מרחב טופולוגי אז האלכסון $\Delta:=\{(x,x)\in X^2\mid x\in X\}$ הוא קבוצה סגורה $\iff$ X הוא T_2

4. לכל פונקציה רציפה $f:X\to Y$ מתקיים ש־$X\simeq Gr(f)$ כאשר

$$Gr(f):=\{(x,f(x))\mid x\in X\}\subseteq X\times Y$$

5. אם $Y\in T_2$ וגם $f:X\to Y$ רציפה אז $Gr(f)$ סגורה ב־$X\times Y$.

6. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים. בכל אחד מהסעיפים הבאים יש תכונה של מרחבים טופולוגיים. עבור כל אחד מהם, הוכיחו או הפריכו שאם X ו־Y מקיימים את התכונה הזו אז גם $X\times Y$ מקיימת אותה:
   (א) דיסקרטיות
   (ב) קשירות
   (ג) קשירות מסילתית
   (ד) ספרביליות
   (ה) B_2
   (ו) B_1
   (ז) מימד אפס
   (ח) מטריזביליות

7. נסתכל על המספרים ה־p־אדים $(\mathbb{Z},d_p)$. הראו ש־$\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

8. הראו ש־$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S_1 \times \mathbb{R}$

9. נסתכל על המישור של סורגנפרי $X := (\mathbb{R}, \tau_s) \times (\mathbb{R}, \tau_s)$. הראו שהוא ספרבילי אבל שיש לו תת מרחב לא ספרבילי.

10. נניח ש־$(X, <, \tau_<)$ ו־$(Y, \prec, \tau_\prec)$ מרחבים סדורים לינארית עם טופולוגיית הסדר. מה היחס בין טופולוגיית הסדר הלקסיקוגרפי τ_{lex} על $X \times Y$ לבין טופולוגיית המכפלה τ_Π?

11. נסתכל על הסדר הלקסיקוגרפי ב־$X := [0,1] \times \{0,1\}$. באופן ציורי, כל נקודה ב־$[0,1]$ הופכת להיות זוג נקודות עם סדר.

    (א) הוכיחו ש־(X, τ_{lex}) היא ספרבילית, B_1 ו־T_2.

    (ב) הראו שהנקודות $(0,0)$ ו־$(1,1)$ מבודדות.

    (ג) מצאו תת מרחב של (X, τ_{lex}) שהומיאומורפי לקו של סורגנפרי

    (ד) הסיקו ש־X אינו מטריזבילי ואינו B_2.

<u>הערה:</u> למרחב הזה קוראים לפעמים splitted interval או double arrow.