בס"ד

83-110 אלגברה ליניארית
מועד ב', 19.3.06, יונתן בק

[2 נק'] **מס. מחברת שלי________.**

משך הבחינה 2.5 שעות. לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה לפתרון. יש לנמק כל חישוב שנדרש. חומר עזר ומחשבי כיס אינם מותרים. כל סעיף שווה 5 נקודות.

<u>הציגו את הפתרונות על השאלון הזה בלבד</u>

המחברת מיועדת לחישובים בלבד ולא ייבדק. מקום הנתון לכל שאלה הוא רמז גדול למקום הנדרש לכתוב פתרון. בהצלחה!!

1. תהי A המטריצה ה3×4 המוגדרת על ידי:

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}.$$

a. כתב/י את המטריצה A במפורש.

b. מצא/י את מרחב האפס של A^T.

c. מה המימד של מרחב העמודות של A?

2. יהיו A ו B שתי מטריצות כך ש AB מוגדר:

a. הסבר/י למה מרחב העמודות של AB מוכל במרחב העמודות של A.

b. איך ניתן להסיק מזה שאם יש אינסוף פתרונות ל $AB\mathbf{x}=\mathbf{b}$ שיש אינסוף פתרונות ל $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

3. השאלה הזאת היא על המטריצות הסימטריות עם ערכים $1,2,\ldots,n-1$ מעל ומתחת לאלכסון הראשי ואפסים על האלכסון הראשי:

$$A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&2\\0&2&0\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&3&0\end{bmatrix},\ A_5=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&2&0&0\\0&2&0&3&0\\0&0&3&0&4\\0&0&0&4&0\end{bmatrix}\ \ldots$$

a. מצא/י מטריצת תמורה P_3 ומטריצה משולשת תחתון L_3 עם 1-ים על האלכסון, ומטריצה מדורגת U_3 כך ש $P_3A_3=L_3U_3$.

b. מה הפתרון הכללי ל $A_3\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$?

c. מה הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A_3 ?

d. הוכח/י ש A_5 אינה הפיכה.

e. תן/י נוסחה מפורשת עבור $|A_n|$ לכל n.

4. פתרון LS למערכת

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$ ניתן על ידי $$\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14/3\\-1\end{bmatrix}$$

a. מצא/י את ההיטל $\mathbf{p}$ של $\mathbf{b}$ על מרחב העמודות $C(A)$.

b. על ידי תהליך גרם-שמידט, מצא/י בסיס אורתונורמלי $\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\}$ של מרחב העמודות $C(A)$. כתב/י את הפירוק $A=QR$.

5. תהי A מטריצה $m\times n$ מדרגה r. נתון שלמערכת $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ אין פתרון, אך שלמערכת $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}$ יש אינסוף פתרונות.

a. מה ניתן להגיד לגבי הערכים של m, n, ו r?

b. מצא/י דוגמה ל A עם התכונות המפורטות כך ש m, n, r הם קטנים ככל שאפשר.

c. איך יודעים ש $\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}$ אינו נמצא מרחב האפס של A^T? (מרחב האפס השמאלי של A)

6. נתון ש $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{bmatrix}$.

a. חשב/י את $|A|$.

b. השתמש/י בנוסחת קרמר למצוא את x_1 במערכת

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

.7

a. השלמ/י את המטריצה A (על ידי הוספת שני האברים החסרים) כך שלA יש וקטורים עצמיים $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ו $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ & \end{bmatrix}.$$

b. מצא/י מטריצה אחרת B עם אותם הווקטורים העצמיים $\mathbf{x}_1$ ו$\mathbf{x}_2$, עם ערכים עצמיים $\lambda_1 = 1$ ו $\lambda_2 = 0$. מהו B^{10}?

c. כתב/י את הפירוק הספקטרלי לA.