

שילוש + פולינום מינמאלי

20 במאי 2016

שילוש

הגדרה: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ניתנת לשילוש אם היא צמודה למטריצה משולשית. כלומר קיימת P הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP = U$$

כאשר U משולשית.

הערה: אופרטור $T: V \rightarrow V$ ניתן לשילוש אם $[T]_B^B$ ניתנת לשילוש עבור בסיס B כלשהוא.

משפט: A ניתנת לשילוש אם הפ"א $p_A(\lambda)$ מ"ל.
אלגוריתם לשילוש בניתן $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$

1. חשב פ"א $p_A(\lambda)$ מצא ע"ע ו"ע. יהיו v_1, \dots, v_k מספר מקס' של ו"ע בת"ל המתאימים לע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. שים את הו"ע בעמודות מטריצה P והשלם עוד עמודות כך ש P מטריצה הפיכה (בפרט $C_i(P) = v_i$ לכל $1 \leq i \leq k$).

2. חשב את

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & M \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & 0 & B \end{array} \right)$$

3. שלש ברקורסיה את המטריצה B בעזרת מטריצה Q . (כלומר $Q^{-1}BQ = U$ משולשית).

4. הגדר $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_k & \\ & Q \end{pmatrix}$ ואז

$$\tilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\tilde{Q} = \tilde{Q}^{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & M \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & 0 & B \end{array} \right) \tilde{Q} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & M \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & 0 & Q^{-1}BQ \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & M \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & 0 & U \end{array} \right)$$

נדגים איך משלשים מטריצה: תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ & C \end{pmatrix}$$

ולכן נח

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda I - B & 0 \\ & \lambda I - C \end{pmatrix} \right| = |\lambda I - B| |\lambda I - C|$$

כעת,

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 2) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 2) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda - 2) [(\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1] = (\lambda - 2) [\lambda^2 - 4\lambda + 4] = (\lambda - 2)^3 \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} |\lambda I - C| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & \lambda + 1 \\ 1 & \lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 1 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda + 1) \left| \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda + 1) \left| \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda + 1)^3 \end{aligned}$$

ובסה"כ

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 2)^3$$

נמצא ר"ע:

עבור $\lambda = 2$ נקבל

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ s \\ s \\ s \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = -1$ נקבל

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים את הו"ע ב-3 עמודות של מטריצה P ונשלמים את שאר העמודות כך ש P תהיה הפיכה. למשל

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מחישוב ישיר, נקבל כי

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

מנמשיך באותו אופן עם המטריצה $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. כיוון שלמטריצות צמודות אותו פולינום אופייני נקבל כי

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda + 1) \cdot p_B(\lambda) = p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3 (\lambda + 1)^3$$

ולכן

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

נמצא ו"ע: עבור $\lambda = -1$

$$B + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = 2$

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים את הו"ע בעמודות מטריצה Q ונשלים עמודה על מנת ש Q תהיה הפיכה. נגדיר

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ובחישוב ישיר

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

משלושית.

הערה: שימו לב שאם יש 2 ו"ע למטריצה 3 על 3 - אין צורך בשלב נוסף.
נגדיר

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q \end{pmatrix}$$

ואז

$$\tilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

נחבר הכל ביחד ונקבל

$$\tilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

פולינום מינימאלי

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. פולינום $m_A(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ יקרא הפולינום המינימאלי של A אם

1. מתקיים כי $m_A(A) = 0$

2. הוא הפולינום עם דרגה מינימאלית המקיים זאת

3. הפולינום מתוקן (כלומר המקדם של החזקה הגבוה ביותר = 1)

דוגמא: הפ"מ של I הוא $\lambda - 1$, הפ"מ של 0 הוא λ

משפט: הפ"מ מחלק כל פולינום המאפס את A . בפרט הפ"מ מחלק את הפ"א. יתר על כן, לפ"מ ול"א יש אותם גורמים אי פריקים. למשל: עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$$

מתקיים כי $p_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$ ולכן הפמ הוא מהצורה

$$m_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^s(\lambda - 2)^t \quad 1 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 3$$

ניתן לבדוק את כל האפשרויות ולקלות כי במקרה שלנו

$$m_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$$

משפט: מטריצה לכסינה אמ"מ הפ"א מהצורה $\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)$ כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ע"ע שונים.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ הפיכה כך ש $(A^3 + A)(A - 2I) = 0$ ומקיימת כי $\text{tr}(A) = 2$. מצא פ"מ ופ"א

פתרון מהנתון הקבל כי הפולינום $g(x) = (\lambda^3 + \lambda)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda^2 + 1)(\lambda - 2)$ מאפס את A ולכן הפ"מ מחלק אותו. מכאן ש

$$m_A(\lambda) \in \{\lambda(\lambda^2 + 1)(\lambda - 2), (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2), \lambda(\lambda - 2), \lambda(\lambda^2 + 1), \lambda(\lambda^2 + 1), \lambda^2 + 1, (\lambda - 2), \lambda\}$$

כיוון ש A הפיכה, אין לה ע"ע 0 ולכן אין גורם λ . נמשיך:

הפולינום $(\lambda - 2)$ לא יכול להיות כי זה סותר את $\text{tr}(A) = 2$

הפולינום $\lambda^2 + 1$ לא יכול להיות כי אז $A^2 + I = 0$ מה שגורר $A^2 = -I$. אם נוציא דט' נקבל כי $|A|^2 = -1$ מה שלא יכול להיות.

לכן $m_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2)$. בתור מטריצה מרוכבת יש לה רק את הע"ע $\pm i, 2$. כיוון שהסכום שלהם $= 2$ אזי יש לה רק ע"ע בודד ששווה

$\text{tr}(A) = 2$ שווה סכום הע"ע המרוכבים שלה)

ולכן $p_A(A) = (\lambda^2 + 1)^3(\lambda - 2)$ (כי החזקה צריכה להיות 7)