פתרון תרגיל בית 9 תורת גלואה - תשע"ח

1. הראו שההרחבה $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\sqrt[5]{2}\right]/\mathbb{Q}$ היא הרחבה על־רדיקלית ע"י בנייה מפורשת של שרשרת שדות מתאימה.

פתרון: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2}\right]\subseteq\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2}\right]\subseteq\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2},\sqrt{5}\right]\subseteq\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{2},\sqrt{5},\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right]$.
(האמת היא שחלק מהשרשרת פה מיותר. אבל זה לא באמת חשוב...).

2. קבעו ונמקו האם הפולינומים הבאים ניתנים לפתרון על ידי רדיקלים:

א. $x^5-6x-16$

ב. x^6+2x^3+6

.

פתרון:

א. חקירת הפולינום תראה שיש לו 3 שורשים ממשיים ושניים מרוכבים. לכן חבורת גלואה של שדה הפיצול תהייה S_5 שהיא אינה פתירה ולכן הפולינום אינו פתיר ע"י רדיקלים.

ב. נציב $t=x^3$, נקבל פולינום מדרגה 2 בt שהוא כמובן ניתן לפתרון ע"י רדיקלים. את $t=x^2$ בודאי ניתן לפתור ע"י רדיקלים ולכן יחד נקבל שהפולינום הנתון ניתן לפתרון ע"י רדיקלים.

3. נניח כי בF יש שורשי יחידה מסדר עד n. הוכיחו כי $f(x)\in F[x]$ ניתן לפתרון על ידי רדיקלים מעל F אם ורק אם $f(x^n)$ ניתן לפתרון על ידי רדיקלים מעל F.

פתרון: נשים לב ששדה הפיצול של $f(x)$ בודאי מוכל בשדה הפיצול של $f(x^n)$, ולכן אם $f(x^n)$ פתיר ע"י רדיקלים בודאי שגם $f(x)$.
לכיוון השני, נניח ש $f(x)$ פתיר ע"י רדיקלים, ונסמן את שורשיו ב $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$. לפי ההנחה שדה הפיצול מוכל בהרחבה על־רדיקלית E מעל F. קל לראות ש־ $f(x^n)$ מתפצל מעל $E' = E\left[\sqrt[n]{\alpha_1},\sqrt[n]{\alpha_2},\dots,\sqrt[n]{\alpha_m}\right]$ שזו בבירור הרחבה על־רדיקלית מעל E. ביחד נקבל ש E' היא הרחבה על־רדיקלית מעל F.

4. תהיינה ${}^{K}\!/_{F}$ ו־ ${}^{L}\!/_{F}$ הרחבות על־רדיקליות. הוכיחו כי הקומפוזיטום ${}^{KL}\!/_{F}$ היא הרחבה על־רדיקלית.

פתרון: ${}^{K}\!/_{F}$ על־רדיקלי ולכן יש שרשרת הרחבות רדיקליות $F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_t = K$ ממימד ראשוני. באופן דומה יש שרשרת $F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_r = L$. נתבונן בשרשרת

$$F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_t = K_tL_0 \subseteq K_tL_1 \subseteq \cdots \subseteq K_tL_r = KL$$

נשים לב ש ${}^{K_tL_{i+1}}\!/_{K_tL_i}$ היא הרחבה או טריוויאלית או רדיקלית (בדקו!) וכך נקבל שKL היא הרחבה על רדיקלית של F.

5. הוכיחו כי ההרחבה ${}^{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]}\!/_{\mathbb{Q}}$ היא על־רדיקלית אך איננה רדיקלית.

פתרון: ניתן לראות בברור שרשרת הרחבות רדיקליות: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \subseteq \mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ ולכן ההרחבה היא על־רדיקלית. אך ההרחבה איננה רדיקלית שכן אם בשלילה $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{\alpha}\right]$ עבור איזשהו $\alpha \in \mathbb{Q}$, אז מכיוון שההרחבה הזו היא גלואה, הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$: $x^4 - \alpha$ מתפצל שם, מה שאומר ש $\alpha i \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ בסתירה לכך שזהו שדה ממשי.