פתרון מבחן מועד ב – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 08/08/19

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\cdot\frac{5}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}_{\frac{1}{2}}\cdot 5=5$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^n$

קל להוכיח שבסיס החזקה שואף לאחד ולכן מותר להשתמש בכלל הe

$$\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n\to e^{\lim n\left(\frac{n+2}{n-1}-1\right)}=e^{\lim\frac{3n}{n-1}}=e^3$$

2.

א. חשבו את $\displaystyle\int\frac{\tan(x)}{\cos(x)+1}dx$.

$$\int\frac{\tan(x)}{\cos(x)+1}dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)(\cos(x)+1)}dx=\left\{\begin{matrix}t=\cos(x)\\ dt=-\sin(x)\,dx\end{matrix}\right\}=\int-\frac{1}{t(t+1)}dt=$$

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}$$

$$1=A(t+1)+Bt$$

נציב $t=0,-1$

$$1 = A$$
$$1 = -B$$

נחזור לאינטגרל המקורי:

$$= \int -\frac{1}{t(t+1)}dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right)dt = \ln|t+1| - \ln|t| = \ln|cos(x)+1| - \ln|cos(x)| + C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{\sin^2(e^x)}{x^2}dx$.

נפעיל מבחן השוואה ראשון על האינטגרל החיובי

$$\frac{\sin^2(e^x)}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

וכיוון שהאינגטרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס, כך גם האינטגרל שלנו.

הערה:

אם היינו מנסים לעשות השוואה גבולית עם $\frac{1}{x^2}$ היינו מקבלים

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin^2(e^x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sin^2(e^x) = \text{אין גבול}$$

היה אפשר להשוות עם $\frac{1}{x^{1.5}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin^2(e^x)}{x^2}}{\frac{1}{x^{1.5}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2(e^x)}{\sqrt{x}} = \left\{\frac{\text{חסום}}{\infty}\right\} = 0$$

המונה קטן באופן גבולי מהמכנה, וכיוון שהאינטגרל של המכנה מתכנס, כך גם האינטגרל שלנו.

3. יהי $a \in \mathbb{R}$. מצאו כמה שורשים יש לפונקציה $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}+a$, הוכיחו תשובתכם.

נתחיל בהליך החקירה

$$f'(x)=e^x-x$$

קשה לדעת מה הסימן של הנגזרת, כי אי אפשר למצוא את השורשים שלה באופן אלגברי. נחקור גם אותה!

$$f''(x)=e^x-1$$

כאשר $x \geq 0$ אז $f''(x) \geq 0$

כאשר $x \leq 0$ אז $f''(x) \leq 0$

כלומר הנגזרת $f'(x)$ יורדת בתחום $(-\infty,0]$ ועולה בתחום $[0,\infty)$ ולכן $f'(x)$ מקבלת מינימום גלובאלי ב$x=0$

$$f'(0)=1$$

כלומר, $f' \geq 1$, כלומר הפונקציה המקורית עולה תמיד!

לכן לפונקציה המקורית יש לכל היותר שורש יחיד.

כעת, אי אפשר ממש להציב ערכים בפונקציה המקורית בגלל הפרמטר שאין אנו יודעים את ערכו.

מה עושים בחדוא כשאי אפשר להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x\to\infty} e^x-\frac{x^2}{2}+a=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{2e^x}+\frac{a}{e^x}\right)=\{\infty(1-0+0)\}=\infty$$

לכן קיימת נקודה x_2 בה $f(x_2)>0$

$$\lim_{x\to(-\infty)} e^x-\frac{x^2}{2}+a=\{0-\infty+a\}=-\infty$$

לכן קיימת נקודה x_1 בה $f(x_1)<0$

וכיוון שf רציפה, לפי ערך הביניים היא חותכת את הציר בין x_1,x_2.

4. תהיינה פונקציות f,g כך שמתקיים כי $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x)=0$.

א. הוכיחו שאם $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

מה אסור לעשות:

אסור להניח בשלילה ש$\lim_{x\to\infty} f(x)=L\neq 0$

השלילה של גבול מסויים, היא שזה לא הגבול. ייתכן שיש גבול אחר, אך ייתכן גם שאין גבול כלל! אז מה כן?

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=\left\{0\cdot\frac{1}{\infty}\right\}=0$$

ב. הוכיחו/הפריכו: אם זה <u>לא נכון</u> ש $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ אזי בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

הפרכה:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$g(x) = 1 - D(x)$$

$$f(x)g(x) = D(x) - D^2(x) = D(x) - D(x) = 0$$

בעוד $f \cdot g \to 0$ לf, g אין גבול.

ג. חזרו על סעיף ב', אם נתון ש f, g רציפות.

עדיין הפרכה:

רעיון כללי – ניקח פונקציות שהן אפס רוב הזמן, חוץ ממשולשים בגובה 1 פעם בכמה זמן.

נניח פונקציה אחת עולה ל1 מעל השלמים הזוגיים, והפונקציה השנייה עולה ל1 מעל השלמים האי זוגיים.

שתיהן רציפות, לשתיהן אין גבול באינסוף.

כמו כן, המכפלה תהיה תמיד אפס.

משאיר לקוראים ניסוח של פתרון מדוייק.

5. תהי סדרה a_n המקיימת כי $a_{n+1} > 2a_n + 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, וכמו כן $a_1 > 0$.

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n > a_n + 1$$

נוכיח באינדוקציה (מקוצרת) שהסדרה חיובית; בדיקה $a_1 > 0$; אם $a_n > 0$ אז $a_{n+1} > 2a_n + 1 > 0$

ולכן

$$a_{n+1} - a_n > a_n + 1 \geq 1 > 0$$

ואכן הסדרה עולה, תביאו לי 10 נקודות.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$.

<u>**אם**</u> a_n חסומה היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו L

נשאיף את שני צידי אי השיוויון, ונקבל כי

$$L > 2L + 1$$
$$L < -1$$

אבל זה עומד בסתירה לכך שהסדרה עולה ולכן

$$L \geq a_1 > 0$$

ולכן הסדרה אינה חסומה.

ולכן $a_n \to \infty$

ולכן

$$\frac{1}{a_n} \to 0$$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

מדובר בסדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = xsin(x)$ הרציפה בקטע $[0,1]$ עם בחירת הקטעים והנקודות כמו במשפט מהכיתה, ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל

$$a_n \to \int_0^1 x\sin(x)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(x) & g = x \\ f = -\cos(x) & g' = 1 \end{Bmatrix} = [-xcos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\,dx$$
$$= [-xcos(x) + \sin(x)]_0^1 = -\cos(1) + \sin(1)$$

ב. קרבו את $\frac{1}{\sqrt{e}}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נקרב באמצעות הפונקציה $f(x) = e^x$ סביבה הנקודה המצוייה $x_0 = 0$ בנקודה הרצוייה $x = -\frac{1}{2}$

ננחש $n = 3$, פה הנגזרות לא קשות.

השגיאה היא

$$R_3 = \frac{e^c}{4!}\left(-\frac{1}{2} - 0\right)^4 = \frac{e^c}{2^4 4!}$$

עבור $-\frac{1}{2} < c < 0$

כיוון ש e^x עולה, אם נגדיל את c נגדיל את הביטוי

$$\frac{e^c}{2^4 4!} < \frac{1}{2^4 4!} < \frac{1}{100}$$

פולינום הטיילור של e^x הוא כמובן

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

ולכן הקירוב הוא

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8 \cdot 6}$$