88113-תרגיל 3:

3.3 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח את התכונות הבאות של הפולינום האופייני $f_A(x)$:

א. $\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{F} : f_A(\lambda)=0\}$.

ב. $f_A(0)=|A|$. בפרט, A הפיכה $\Leftrightarrow$ $f_A(0)\neq 0$.

[רמז: אפשר להציב את הסקלר ורק אחר כך לחשב את הדטרמיננטה]

3.4 תרגיל. תהא $A=\alpha I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מצא את הפולינום האופייני של A.

3.9 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x)=f_B(x)$ (במלים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$. [רמז: (א)]

3.11 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שלכל ערך עצמי λ של A, הריבוי הגאומטרי של λ קטן או שווה לריבוי האלגברי שלו.

הדרכה: נוכיח עבור העתקה $T:V\to V$, כאשר V מרחב ממימד n. (מדוע זה מספיק?)

א. יהיו $v_1,\dots,v_k$ בסיס עבור V_λ. כרגיל, נשלים אותו לבסיס $B=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ עבור V.

ב. הראה ש $(x-\lambda)^k$ מחלק את הפולינום האופייני של $[T]_B$.

3.15 תרגיל. זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי–המילטון: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. לפי ההגדרה, $f_A(x)=|A-xI|$, לכן $f_A(A)=|A-AI|=|A-A|=|O|=0$. מ.ש.ל. אבל דני בחור פיקח: הוא יודע ש $f_A(A)$ צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [רמז: כיצד נראית המטריצה xI? האם אפשר להציב A במקום ה x-ים שבמטריצה זו?]

3.18 תרגיל[1]**. מופע הקסמים של companion & vandermonde.**

א. יהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$, ותהא $A = \mathrm{companion}(a_0, \dots, a_{n-1})$. הוכח שהפולינום $a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ מאפס את A. [רמז: תרגיל מסעיף 7 בפרק ו']

ב. מצא מטריצה המאפסת את הפולינום $5x^5 + 3x^3 - x^2 + 7 \in \mathbb{R}[x]$.

ג. לכל אות $x \in \{\text{א}, \text{ב}, \dots, \text{ת}\}$, נסמן ב־$\underline{x}$ את הערך הגימטרי שלה ($\underline{\text{א}} = 1$, $\underline{\text{ב}} = 2$, ... $\underline{\text{י}} = 10$, $\underline{\text{כ}} = 20$, ..., $\underline{\text{ק}} = 100$, ..., $\underline{\text{ת}} = 400$). מצא מטריצה A המאפסת את הפולינום:

$$\underline{\text{ת}}1 + \underline{\text{ר}}x^1 + \underline{\text{ג}}x^2 + \underline{\text{י}}x^3 + \underline{\text{ל}}x^4 + \underline{\text{א}}x^6 + \underline{\text{ר}}x^7 + \underline{\text{ו}}x^8 + \underline{\text{ק}}x^9 + x^{10}.$$

ד. מצא מטריצה ממשית הדומה למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$. [רמז: יש לה 3 ערכים עצמיים שונים. מצא מטריצה ממשית עם ערכים עצמיים אלו]

ה. יהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$, ותהא $A = \mathrm{companion}(a_0, \dots, a_k)$. מהם הוקטורים העצמיים של A?

ו. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ השורשים של הפולינום $a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{C}[x]$. הוכח: אם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים זה מזה, אזי מטריצת ונדרמונדה

$$\mathrm{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

היא הפיכה (למה?), והמטריצה

$$\mathrm{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} \mathrm{companion}(a_0, \dots, a_{n-1}) \mathrm{vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

היא אלכסונית (מהם איברי האלכסון?).