פתרון תרגיל 5 – אלגברה מופשטת 1

1. יהיו X,Y חבורות ו $f:X\to Y$ הומומורפיזם. תהי $H\lhd X$ ת"ח נורמלית.
הוכיחו כי $f(H)$ ת"ח נורמלית של $f(X)$. האם בהכרח $f(H)\lhd Y$?

הוכחה: לכל $G\le X$, $f(G)\le f(Y)$. לכן, מ"ל נורמליות של $f(H)$ ב $f(X)$.
יהיו $g\in f(X), y\in f(H)$ מ"ל $gyg^{-1}\in f(H)$.
אבל, $g\in f(X), y\in f(H) \Leftarrow$ קיימים, $x\in X, h\in H$ כך ש $g=f(x), y=f(h)$.
מהנורמליות של H ב X, $xhx^{-1}\in H$. לכן, $f(xhx^{-1})\in f(H)$.
לכן, $f(xhx^{-1})=f(x)f(h)f(x)^{-1}\in H$. מש"ל.
נראה כי לא בהכרח $f(H)\lhd Y$.
דוגמה נגדית: יהיו $Y=D_3$ ו $H=X=<\tau>=\{e,\tau\}$. נגדיר $f:X\to Y$ את ההעתקת ההכלה, $f(x)=x$. נשים לב, $H\lhd X$ מכיוון שחבורה תמיד נורמלית בעצמה ואילו, $f(H)=H$ אינה תת חבורה נורמלית של $Y=D_3$.
(אכן, עבור $\sigma\in Y$, $\tau\in f(H)=H$ $\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau\sigma^2\sigma^{-1}=\tau\sigma\notin f(H)$).

2. הוכיחו את הטענות הבאות:

2.1. אם $H\le G$ אז לכל $g\in G$, $gHg^{-1}\le G$ ת"ח מסדר $|H|$.
הוכחה: יהי $g\in G$, אזי:

$$*\ e\in H\Rightarrow geg^{-1}=e\in gHg^{-1}\Rightarrow H\neq\phi$$

$$*\ \begin{aligned}&x_1,x_2\in gHg^{-1}\Rightarrow \exists h_1,h_2\in H:\quad x_1=gh_1g^{-1}, x_2=gh_2g^{-1}\\ &\Rightarrow x_1x_2^{-1}=(gh_1g^{-1})(gh_2^{-1}g^{-1})=g(h_1h_2^{-1})g^{-1}\in gHg^{-1}\end{aligned}$$

לכן $gHg^{-1}\le G$.
נתבונן בהעתקה: $x\mapsto gxg^{-1}$ מ H ל gHg^{-1}.
מ"ל כי ההעתקה הנ"ל חח"ע ועל.
מהגדרתה ברור כי היא על. בנוסף, אם $gxg^{-1}=gyg^{-1}$ עבור $x,y\in H$,
מצמצום נקבל, $x=y$. לכן, ההעתקה הנ"ל היא גם חח"ע והסדר של gHg^{-1} שווה לסדר של H.

2.2. אם $K\le H\lhd G$ ו H חבורה ציקלית סופית אז $K\lhd G$.
הוכחה: מ"ל כי לכל $g\in G$, $gKg^{-1}=K$.
מכיוון ש H נורמלית ב G, לכל $g\in G$, $gKg^{-1}\le gHg^{-1}=H$.
לכן, $gKg^{-1}\le H$ מאותו הסדר של $K\le H$.
מכיוון ש H חבורה ציקלית סופית, לא קיימות ב H תתי חבורות שונות מאותו הגודל.
לכן, $gKg^{-1}=K$. מש"ל.

3. תהי $D_4=<\sigma,\tau>$ החבורה הדיהדרלית מסדר 4, כש $o(\sigma)=4, o(\tau)=2$.
נגדיר: $H=\{e,\tau\sigma,\sigma^2,\tau\sigma^3\}$, $K=\{e,\tau\sigma\}$. הוכיחו כי $H\lhd D_4$ ו $K\lhd H$ אבל K

אינה ת"ח נורמלית של D_4.
הוכחה: $|D_4|=8$, $|H|=4$ ו $|K|=2$. לכן, $[D_4:H]=2,[H:K]=2$ ת"ח מאינדקס 2. לכן, $H\lhd D_4$ ו $K\lhd H$.
נראה כי K אינה ת"ח נורמלית של D_4.
מ"ל: קיימים $k\in K$ ו $d\in D_4$ כך ש $dkd^{-1}\notin K$.
ניקח $d=\sigma,k=\tau\sigma$ ונקבל: $dkd^{-1}=\sigma\tau\sigma\sigma^{-1}=\sigma\tau=\tau\sigma^3\notin K$.

4. יהיו H,K תתי חבורות של G. הוכיחו:

4.1. $KH=HK$ כקבוצות, אם ורק אם $HK\le G$.
הוכחה: $(\Leftarrow)$ $e\in H,K \Leftarrow e=ee\in HK$. יהיו $x,y\in HK$, מ"ל $xy^{-1}\in HK$.
$x,y\in HK$, לכן קיימים $h_1,h_2\in H,k_1,k_2\in K$ כך ש $x=h_1k_1,y=h_1k_1$.
לכן, $xy^{-1}=h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}\in HKKH=HKH=HHK=HK$.
(שימו לב כי עבור חבורה G, $GG=G$).
$(\Rightarrow)$ עבור $X\subseteq G$ נסמן $X^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in X\}$. נשים לב, אם $X\le G$ אזי $X^{-1}=X$.
בפרט, $H,K,HK\le G$ לכן: $HK=(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH$.

4.2. אם $H\lhd G$ אזי $HK\le G$. אם גם $K\lhd G$, אזי $HK\lhd G$.
הוכחה: אם $H\lhd G$ אזי לכל $g\in G$ $gH=Hg$. בפרט, לכל $k\in K$ $kH=Hk$.
ו $KH=\bigcup_{k\in K}kH=\bigcup_{k\in K}Hk=HK$. לכן, לפי הסעיף הקודם, $KH\le G$.
אם בנוסף $K\lhd G$, צ"ל $HK\lhd G$. יהיו $hk\in HK$, $g\in G$. מ"ל $ghkg^{-1}\in HK$.
אבל, מהנורמליות של H,K ב G: $ghkg^{-1}=(ghg^{-1})(gkg^{-1})\in HK$.

4.3. קיימת חבורה G ותתי חבורות $H,K\le G$ שאינן נורמליות כך ש $HK\le G$.
הוכחה: נתבונן ב $G=D_3$, $H=K=<\tau>=\{id,\tau\}$. ראינו כי H ו K ת"ח לא נורמליות של G. אבל, $HK=HH=H\le G$.

5. יהיו G ו H חבורות ו $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם. הוכיחו את הטענות הבאות:
5.1. $\varphi:G\to H$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi=\{1_G\}$.
פתרון: $\Leftarrow$: $\varphi:G\to H$ הומומרפיזם ולכן מתקיים בהכרח $\varphi(1_G)=1_H$
ומהעובדה שהוא חח"ע נובע ש $\varphi(g)\neq 1_H$ $\forall g\neq 1_G$. מכאן $\ker\varphi=\{1_G\}$.
$\Rightarrow$: כדי להוכיח ש φ חח"ע נניח ש $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ונראה ש $g_1=g_2$.
$\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ולכן $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}=1_H$. מכיון ש φ הומומרפיזם מתקיים $\varphi(g_1g_2^{-1})=\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}$ ולכן $\varphi(g_1g_2^{-1})=1_H$. כלומר $g_1g_2^{-1}\in\ker\varphi$. אך מהנתון $\ker\varphi=\{1_G\}$ ומכאן $g_1g_2^{-1}=1_G$ ולבסוף נקבל ש $g_1=g_2$.

5.2. אם $\varphi:G\to H$ הוא אפימורפיזם ו G אבלית אז גם H אבלית.

הוכחה: יהיו $a,b \in H$. צ"ל $ab=ba$. אבל $\varphi: G \to H$ הוא הומומורפיזם על לכן קיימים $x,y \in G$ כך ש $\varphi(x)=a, \varphi(y)=b$.

נשים לב: $ab=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy) \underset{G-is-abelian}{=} \varphi(yx)=\varphi(y)\varphi(x)=ba$

מש"ל.

6. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

6.1 קיים מונומורפיזם $f: GL_2(R) \to (R^{16},+)$.

הפרכה: נניח בשלילה כי קיים מונומורפיזם $f: GL_2(R) \to (R^{16},+)$.

נתבונן בצמצום של f, $f: GL_2(R) \to \mathrm{Im}(f)$. אזי,

$$GL_2(R) \cong \mathrm{Im}(f) \le (R^{16},+)$$

אבל $\mathrm{Im}(f) \le (R^{16},+)$ אבלית ואילו $GL_2(R)$ אינה אבלית. סתירה להיותן איזומורפיות.

6.2 קיים מונומורפיזם $f: D_7 \to S_5$.

הפרכה: נשים לב: $|S_5|=5!=120$ ו $|D_7|=2\cdot 7=14$.

נניח בשלילה כי קיים מונומורפיזם $f: D_7 \to S_5$ אזי מכיוון ש f חח"ע, $14=|D_7|=|\mathrm{Im}(f)|$. אבל $\mathrm{Im}(f) \le S_5$. לכן עפ"י משפט לגרנז', $14|120$.

סתירה.

6.3 קיים אפימורפיזם $f: C^* \to (R_+,\cdot)$.

הוכחה: נגדיר $f: C^* \to (R_+,\cdot)$ באופן הבא:

$$\forall z \in C^*, \qquad f(z)=\|z\|$$

אזי:

* f שומרת פעולות: $f(z_1z_2)=\|z_1z_2\|=\|z_1\|\|z_1\|=f(z_1)f(z_2)$

* f על: יהא $y \in R_+$ אזי עבור $y \in C^*$ מתקיים, $f(y)=\|y\| \underset{y\in R_+}{=} y$.

6.4 קיים איזומורפיזם $f:(R,+) \to (R_+,\cdot)$.

הוכחה: נגדיר $f:(R,+) \to (R_+,\cdot)$ באופן הבא:

$$\forall x \in R, \qquad f(x)=2^x$$

אזי:

* f שומרת פעולות: $f(x+y)=2^{x+y}=2^x2^y=f(x)f(y)$

* f על: יהא $y \in R_+$ אזי עבור $x=\log_2 y \in R$ מתקיים, $f(x)=2^{\log_2 y}=y$.

* f חח"ע: אם עבור $x,y \in R$ $2^x=2^y$ אזי $x=y$.

6.5 קיים אפימורפיזם $f: Z_{60} \to D_4$.

הפרכה: נניח בשלילה כי קיים אפימורפיזם $f: Z_{60} \to D_4$, אזי, מכיוון שאבליות נשמרת תחת אפימורפיזם ו Z_{60} אבלית נקבל ש D_4 אבלית.

סתירה.

7. יהיו $m<n$ טבעיים. הוכיחו כי $m|n$ אם ורק אם קיים מונומורפיזם $f:Z_m\to Z_n$.

הוכחה: $(\Rightarrow)$ קיים מונומורפיזם $f:Z_m\to Z_n$ לכן $\operatorname{Im} f=f(Z_m)\le Z_n$. אבל, f חח"ע לכן $|\operatorname{Im} f|=|Z_m|=m$ וממשפט לגרנז' נובע כי $m|n=|Z_n|$.
$(\Leftarrow)$ Z_n חבורה ציקלית מסדר n. $m|n$ לכן קיימת ת"ח $H\le Z_n$ מסדר m. H ציקלית בתור ת"ח של חבורה ציקלית. לפי משפט המיון של חבורות ציקליות, $Z_m\cong H\le G$. לכן קיים איזומורפיזם, $f:Z_m\to H$. נסמן ב i את העתקת ההכלה $i:H\to Z_n$. אזי i מונומורפיזם. בסה"כ $i\circ f:Z_m\to Z_n$ מונומורפיזם כהרכבה של מונומורפיזמים.

8. תהי G חבורה ויהיו $H_1,H_2\le G$ תתי חבורות המקיימות $H_1\cong H_2$. הוכיחו או הפריכו: $[G:H_1]=[G:H_2]$.

הפרכה: נבחר $G=Z$ ו- $H_1=3Z,H_2=5Z$. ברור ש- $H_1\cong H_2$ (מדוע? כמה חבורות ציקליות אינסופיות אתם מכירים?). עם זאת, $[G:H_1]=3,\ [G:H_2]=5$.

9. תהי G חבורה מסדר סופי ו- $N\triangleleft G$.

9.1 האם יתכן ש- N ו- G/N שתיהן אבליות, אבל G איננה כזאת?

פתרון: כן. לדוגמה: $G=D_3$ אינה אבלית. $N=<\sigma>\triangleleft G$ ת"ח נורמלית בתור ת"ח מאינדקס 2. בנוסף, $N=<\sigma>$ אבלית בתור תת חבורה ציקלית. $G/N\cong Z_2$ בתור החבורה היחידה מסדר 2. בפרט $N=<\sigma>$ ו $G/N\cong Z_2$ אבליות.

9.2 נניח כי קיים $x\notin N$ כך ש $x^2\in N$. הוכיחו כי הסדר של G זוגי.

הוכחה: נתבונן ב $xN\in G/N$. מכיוון ש $x\notin N$, $xN\ne e_{G/N}$.

לעומת זאת, $(xN)^2=x^2N=N=e_{G/N}$ מכיוון ש $x^2\in N$.

לכן, לפי משפט לגרנז' 2 מחלק את סדר החבורה G/N. מכיוון שלפי משפט לגרנז', $|G/N|$ מחלק את הסדר של G $(|G|=|G/N||N|)$ מטרנזיטיביות היחס "מחלק את" נקבל ש 2 מחלק את הסדר של החבורה G. ובפרט סדר החבורה זוגי.

בהצלחה! ☺