

תרגיל 4 – מבוא לאנליזה 1

1. נתון כי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת (במובן הצר) והסדרה $\{b_n\}$ מתבדרת.

(א) הוכיחו כי הסדרה $\{a_n + b_n\}$ מתבדרת.

(ב) האם ייתכן שהסדרה $\{a_n \cdot b_n\}$ מתכנסת (במובן הצר)?

2. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$:

(א)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(ב)

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

3. הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 \end{cases}$$

(א) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $0 < a_n < 1$.

(ב) הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת.

(ג) הסיקו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.

4. הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

(א) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $0 \leq a_n < 2$.

(ב) הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה.

(ג) הסיקו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.