מד"ר , תרגול 7

21 בדצמבר 2013

מערכת משוואות לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

אם נתונה מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} x\prime_1 & = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) & + \cdots + & a_{1,n}x_n(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ x\prime_n & = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) & + \cdots + & a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

נגדיר:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ניתן לרשום את המערכת באופן הבא:

$$\begin{aligned} \vec{x\prime} &= A \cdot \vec{x} \\ A &= (a_{ij}) \end{aligned}$$

נחפש פתרון מהצורה $\vec{x} = e^{xt}\vec{v}$. נציב במשוואה

$$\vec{x\prime} = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}$$

ולכן

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} : /\lambda e^{\lambda t}\vec{v} &= Ae^{\lambda t}\vec{v} \\ A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \end{aligned}$$

ולכן $\vec{v}$ הוא ו"ע של A עם ע"ע λ. ישנם שלושה מקרים:

מקרה א': כל הע"ע שונים וממשים ואז הפתרון הוא מהצורה $\vec{x} = c_1e^{\lambda t}\vec{v_1} + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}\vec{v_n}$ כאשר λ_i ע"ע ו־v_i הו"ע המתאימים להם.

דוגמה 1:

פתרו

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1\prime &=& x_1+x_2-2x_3 \\ x\prime_2 &=& -x_1+x_2+x_3 \\ x\prime_3 &=& 2x_2-x_3 \end{array}\right.$$

פתרון: נרשום במטריצה:

$$\vec{x\prime} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

נחפש ע"ע:

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) &= 0 \\ \lambda_{1,2,3} &= 0, 2, -1 \end{aligned}$$

נמצא ע"ע:

:$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אז הפתרון הוא

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מקרה ב': אם הע"ע מרוכבים אז עבור כל ע"ע נקבל גם את הצמוד שלו. על מנת למצוא ו"ע ממשים מפרידים בין החלק הממשי למדומה ויוצרים וקטורים חדשים.

דוגמה 2: פתור:

$$\begin{cases} x_1\prime = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2\prime = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

פתרון: נרשום במטריצה

$$\vec{x}\prime = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

נחפש ע"ע:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

נמצא ו"ע עבור $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-2i & 2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (1-i)a - b &= 0 \\ 2a - (1+i)b &= 0 \end{aligned}$$

אפשר לראות כי השורות ת"ל ולכן

$$\begin{aligned} b &= (1-i)a \\ \vec{v_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הוקטור העצמי שמתאים לע"ע λ_2 יהיה צמוד ל$\vec{v_1}$:

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

אז הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

הערה:_ על מנת לקבל ו"ע ממשים , מפרידים בין ממשי למרוכב

$$y=c_1e^te^{2it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+c_2e^te^{-2it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}=c_1e^t(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+c_2e^t(\cos(2t)-i\sin 2t)\begin{pmatrix}1\\1+\end{pmatrix}$$

נמשיך ע"י הפרדת הוקטורים:

$$\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= (c_1+c_2)e^t\cos 2t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(c_1-c_2)ie^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin 2t+c_1e^t\cos 2t\begin{pmatrix}0\\-i\end{pmatrix}+ic_1e^t\begin{pmatrix}0\\-i\end{pmatrix}\sin 2t+c_2e^t\\&= (c_1++c_2)e^t+\cos 2t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(c_1-c_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t\sin 2t-c_1e^ti\cos 2t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-c_1e^t\sin 2t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+c_2e\\&= e^t\begin{pmatrix}c_1\cos 2t+c_2\sin 2t\\c_3\cos 2t+c_4\sin 2t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

מקרה ג':

אין ו"ע לכל ע"ע. במקרה זה נחפש פתרון נוסף מהצורה $\vec{x}(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}P_1(t)\\\vdots\\P_n(t)\end{pmatrix}$ (כלומר כאן הריבוי האלגברי של הע"ע גדול יותר כלומר יש יותר ע"ע מו"ע).

דוגמה 3: פתור:

$$\vec{x\prime}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\3&6&2\end{pmatrix}\vec{x}$$

פתרון: ניתן לראות בקלות שהע"ע הם $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$. עבור $\lambda_{1,2}=1$: $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}$ ועבור $\lambda_3=2$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. נחפש פתרון נוסף מהצורה $\vec{x}(t)=e^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix}P_1(t)\\\vdots\\P_n(t)\end{pmatrix}$ כאשר דרגת הפולינום P_i קטנה ב1 מהריבוי האלגברי של הע"ע. לכן מחפשים

פיתרון מהצורה $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \\ c_0 + c_1 t \end{pmatrix}$. כדי למצוא את המקדמים נציב במשוואה הנ"ל:

$$x_1\prime(t) = a_0 e^t + a_1 e^t + a_1 t e^t = e^t a_1 (1+t) + a_0 e^t$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$e^t \begin{pmatrix} a_1(1+t) + a_0 \\ b_1(1+t) + b_0 \\ c_1(1+t) + c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \\ c_0 + c_1 t \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת ונקבל:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ ,b_1 &= -4a_0 \\ c_0 &= 24a_0 - 6b_0 \\ c_1 &= 24a_0 \end{aligned}$$

נקבל שהפיתרון הנוסף עבור $\lambda = 1$ הוא

$$\vec{x}(t) = e^t a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 24t + 24 \end{pmatrix} + e^t b_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$x\vec{(t)} = e^t a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 24t + 24 \end{pmatrix} + e^t b_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + c e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מערכות משוואות הומוגנית עם מקדמים קבועים

עד עכשיו השתמשנו בשיטה של ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים. שיטה נוספת לפיתרון היא דרך הקטנת מימד.

שיטה ב' - הקטנת מימד משתמשים בשיטה זו כאשר נתון אחד הפתרונות וצריך למצוא את האחרים. נתונה מערכת המשוואות $\vec{x\prime} = A \cdot \vec{x}$ ונתון פתרון $x_0\vec{(t)} = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$. נרצה למצוא $(n-1)$ פתרונות נוספים. נקבל אותם ע"י החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{x_k^0}{x_n^0} x_n \\ y_n &= \frac{1}{x_n^{(0)}} x_n \end{aligned}$$

דוגמה 4: נתון $t > 0$:

$$\begin{cases} tx_1\prime = 2x_1 - x_2 \\ tx_2\prime = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

1. הראה שיש למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_1 = x_2$.
2. בנה משפחה בסיסית של פתרונות.

פתרון:

1. נניח $x_1 = x_2$ אז נקבל:

$$\begin{aligned} tx_1\prime &= x_1 \\ \frac{x_1\prime}{x_1} &= \frac{1}{t} \\ \ln x_1 &= \ln t + c \\ x_1 &= c \cdot t \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

פתרון כדרוש.

2. $\begin{cases} x_1\prime = \frac{2}{t}x_1 - \frac{x_2}{t} \\ x_2\prime = \frac{3}{t}x_1 - \frac{2}{t}x_2 \end{cases}$. נשתמש בהקטנת מימד. במקרה שלנו $n = 2$. נסמן

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{t}{t}x_2 = x_1 - x_2 \\ y_2 &= \frac{1}{t}x_2 \end{aligned}$$

ננסה להוריד את המימד של המשוואה המקורית ע"י ההצבות הנ"ל כלומר

$$\begin{aligned} y_1\prime &= x_1\prime - x_2\prime = \frac{2}{t}x_1 - \frac{1}{t}x_2 - \frac{3}{t}x_1 + \frac{2}{t}x_2 \\ &= -\frac{1}{t}x_1 + x_2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{-1}{t}(x_1 - x_2) = \frac{-1}{t}y_1 \\ y_2\prime &= \frac{x_2\prime \cdot t - x_2}{t^2} = \frac{1}{t}x_2\prime - \frac{x_2}{t^2} = \\ &= \frac{3}{t^2}x_1 - \frac{2}{t} \cdot x_2 - \frac{1}{t^2}x_2 = \\ &= \frac{3}{t^2}(x_1 - x_2) = \frac{3}{t^2}y_1 \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} y_1\prime &= \frac{-y_1}{t} \\ y_2\prime &= \frac{3}{t^2}y_1 \end{aligned}$$

נפתור:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{c}{t} \\ y_2 &= \int \frac{3}{t^2}\cdot\frac{c}{t}dt = \frac{-3c}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+c_2 \end{aligned}$$

נחזור ל־λ_1, λ_2:

$$\boxed{x_1(t) = y_1 + ty_2 = \frac{c}{t} - \frac{3c}{2t} + c_2 t}$$

$$\boxed{x_2(t) = ty_2 = \frac{-3c}{2t} + c_2 t}$$

שיטת חילוץ והצבה

דוגמה 5:

$$\begin{cases} x_1\prime = x_1 - 2x_2 \\ x_2\prime = 5x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

פתרון: נחלץ לדוגמה מהמשוואה הראשונה את x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1 - x_1\prime}{2} \\ x_2\prime &= \frac{x_1\prime - x_1\prime\prime}{2} \\ \frac{x_1\prime - x_1\prime\prime}{2} &= 5x_1 + \frac{3x_1 - 3x_1\prime}{2} \end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר מסדר שני עם מקדמים קבועים:

$$x_1\prime\prime - 4x_1\prime + 13x_1 = 0$$

נפתור את המשוואה האופיינית ונקבל $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ ולכן:

$$x_1(t) = e^{2t} \cdot (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t))$$

נציב את הפתרון במשוואה הראשונה:

$$\begin{aligned} x_1{\prime}(t) &= 2e^{2t} \cdot (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) + e^{2t} \cdot (-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t) \\ x_2(t) &= \frac{x_1 - x_1{\prime}}{2} = \frac{e^{2t}}{2} \cdot [(-3c_2 - c_1) \cdot \cos 3t + (3c_1 - c_2) \cdot \sin 3t] \end{aligned}$$

הערה: כתוצאה משיטת החילוץ אפשר לקבל שיטה לפתרון מערכות הומוגניות במקדמים קבועים. השיטה הזו אמנם לא יעילה אבל במקרה שהמטריצה לא לכסינה זאת השיטה היחידה לפתרון המערכת.