חשבון אינפי 2 למדמ"ח
תרגיל 7- פתרון
נקודות קיצון מקומי, נקודות קיצון תחת אילוצים.

1. מצאו נקודות קיצון מקומי של הפונקציות הבאות :

א. $f\left(x,y\right)=3\left(x^2+y^2\right)+x^3+4y$

פתרון :

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} f'_x=6x-3x^2=0 \\ f'_y=6y+4=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\left(2,-\frac{2}{3}\right),\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ נקודות חשודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

- נבדוק את הנקודה $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$:

$$\Delta_1\left(0,-\frac{2}{3}\right)=6>0$$
$$\Delta_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)=36>0$$

$\Leftarrow$ $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ נקודת מינימום מקומי .

- נבדוק את הנקודה $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$:

$$\Delta_1\left(2,-\frac{2}{3}\right)=-6<0$$
$$\Delta_2\left(2,-\frac{2}{3}\right)=-36<0$$

$\Leftarrow$ אין קיצון בנקודה $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ (אוכף)

ב. $f\left(x,y\right)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} f_x=6x^2+y^2+10x=0 \\ f_y=2xy+2y=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\left(-1,-2\right),\left(-1,2\right),\left(-\frac{5}{3},0\right),\left(0,0\right)$ נקודות חשודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yz} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix}$$

- נבדוק את הנקודה $(0,0)$:

$$\Delta_1(0,0) = 10 > 0$$

$$\Delta_2(0,0) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ נקודת מינימום מקומי .

- נבדוק את הנקודה $\left(-\frac{5}{3},0\right)$:

$$\Delta_1\left(-\frac{5}{3},0\right) = -10 < 0$$

$$\Delta_2\left(-\frac{5}{3},0\right) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10/3+2 \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$$

$\Leftarrow$ $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ נקודת מקסימום מקומי .

- נבדוק את הנקודה $(-1,2)$:

$$\Delta_1(-1,2) = -2 < 0$$

$$\Delta_2(-1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$\Leftarrow$אין קיצון בנקודה $(-1,2)$, ז"א $(-1,2)$ נקודת אוכף .

- נבדוק את הנקודה $(-1,-2)$:

$$\Delta_1(-1,-2) = -2 < 0$$

$$\Delta_2(-1,-2) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$\Leftarrow$אין קיצון בנקודה $(-1,-2)$. (אוכף)

2. מצאו נקודות קיצון של הפונקציות הבאות בתחומים סגורים :

א. $x^2+y^2\le 25$ $\quad$ $f(x,y)=5-3x-4y$

נבדוק האם יש לפונקציה $f(x,y)$ נקודות קיצון בתחום $x^2+y^2<25$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -3 \quad \ne 0 \\ f_y &= -4 \quad \ne 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Leftarrow$ אין נקודות קיצון בתוך התחום .

$\Leftarrow$ נחפש נקודות קיצון על השפה של התחום

$$L(x,y,\lambda)=5-3x-4y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$$

$$\begin{cases} L_x = -3+2x\lambda = 0 \\ L_y = -4+2y\lambda = 0 \\ L_\lambda = x^2+y^2-25=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases} (3,4) & for \quad \lambda=\frac{1}{2} \\ (-3,-4) & for \quad \lambda=-\frac{1}{2} \\ (0,\pm 5) & for \quad \lambda=\pm\frac{2}{5} \\ (\pm 5,0) & for \quad \lambda=\pm\frac{3}{10} \end{cases}$ נקודות חשודות לקיצון .

הקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2\le 25\right\}$ קבוצה סגורה וחסומה ולכן פונקציה רציפה מקבלת בה מינימום ומקסימום , ולכן נותר להשוות את ערכי הפונקציה $f(x,y)$ בנקודות חשודות לקיצון .

$$f(3,4)=-20 \qquad f(0,-5)=25$$
$$f(-3,-4)=30 \qquad f(5,0)=-10$$
$$f(0,5)=-15 \qquad f(-5,0)=20$$

$\Leftarrow$ $(-3,-4)$ נקודת מקסימום בתחום הסגור.

$(3,4)$ נקודת מינימום בתחום הסגור.

ב. $x^2+y^2\le 1$ $\quad$ $f(x,y)=\sqrt{3}xy+x^2$

נבדוק האם יש לפונקציה $u(x,y)$ נקודות קיצון בתחום $x^2+y^2<1$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \sqrt{3}y+2x=0 \\ f_y &= \sqrt{3}x=0 \end{aligned}\right\}$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ נקודה חשודה לקיצון ב $x^2+y^2<1$.

$\Leftarrow$ נחפש נקודות קיצון על השפה של התחום

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt{3}xy+x^2+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\begin{cases} L_x=\sqrt{3}y+2x+2x\lambda=0 \\ L_y=\sqrt{3}x+2y\lambda=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases} \left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & for \quad \lambda=\frac{1}{2} \\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right) & for \quad \lambda=-\frac{3}{2} \end{cases}$ נקודות חשודות לקיצון .

נשווה את הערכים של $f(x,y)$ בכל הנקודות החשודות :

$$f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2} \qquad f(0,0)=0$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \qquad f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ $\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ נקודות מינימום בתחום .

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ נקודות מקסימום בתחום .