(88132) חשבון אינפנטיסמלי 1 | טענות ומשפטים חשובים למבחן

פרופ' צבאן | תשפ"ב

19 בינואר 2022

- יונתן סמידוברסקי -

מכיל רק חלק מהטענות והמשפטים ממיקוד 2021-2022

1) צפיפות $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$: בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונאלי

הוכחה: יהיו $a < b \in \mathbb{R}$

צ"ל: קיים רציונאלי $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ כך ש$a < \frac{m}{n} < b$.

מתכונת ארכימדס קיים $\frac{1}{n} < b - a$ ולכן הקבוצה הבאה לא ריקה וכן חסומה מלעיל

$$m := max\left\{k \in \mathbb{Z} | \frac{k}{n} \leq a\right\} = max\left\{k \in \mathbb{Z} | k \leq na\right\}$$

כעת $m + 1 \notin \{k \in \mathbb{Z} | k \leq na\}$ כי גדול מהמקסימלי ומתקיים $m + 1 > na$. כלומר, $a < \frac{m+1}{n}$

מצד שני $b = a + (b - a) > \frac{m}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m+1}{n}$ ולכן סיימנו.

2) התכנסות סדרה התכונות הבאות שקולות:

(א) $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |a_n - a| \leq \epsilon$

(ב) $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$

(ג) $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |a_n - a| \leq c\epsilon$

הוכחה:

א$\Leftarrow$ב: ניקח $\varepsilon' := \frac{\epsilon}{2}$ כעת מהנתון קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

ב$\Leftarrow$א: מיידי, קטן בפרט קטן שווה.

א$\Leftarrow$ ג: מיידי, לוקחים $c := 1$

ג$\Leftarrow$א: נחלק למקרים

אם $c=0$: אזי $0 \le |a_n - a| \le 0$ ואז $a_n = a$ ובפרט $a_n \to a$

אם $c \neq 0$: אזי ניקח $\epsilon' := \frac{\epsilon}{c}$ ואז מתקיים $|a_n - a| \le c\epsilon' = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$

3) יחידות הגבול

תהי $a_n \to a$ **וכן** $a_n \to b$ אזי $a = b$

הוכחה:

נניח בשלילה $a \neq b$, נניח בלי הגבלת הכלליות a>b

ניקח $\epsilon := \frac{a-b}{3}$ מההגדרה מתקיים כי קיים N_1 כך שלכל $n \ge N_1$ מתקיים $|a_n - a| \le \epsilon$.

מצד שני, קיים N_2 כך שלכל $n \ge N_2$ מתקיים $|a_n - b| \le \epsilon$.

כעת ניקח $N := max\{N_1, N_2\}$ ויתקיים לכל $n \ge N$:

$a - b = \mid a - b \mid \le \mid a - a_n \mid + \mid a_n - b \mid$

מאי שיוויון המשולש

ואז $\mid a - a_n \mid + \mid a_n - b \mid \le \epsilon + \epsilon = 2 \cdot \epsilon = 2 \cdot \frac{a-b}{3}$

בסה"כ קיבלנו $a - b \le \frac{2}{3}(a-b)$ ומהנתון a>bניתן לחלק את אי השיוויון ב$a-b$ ומקבלים $1 \le \frac{2}{3}$ שזו כמובן סתירה.

4) חשבון גבולות

(א) סכום: אם $a_n \to a$ וכן $b_n \to b$ אז: $a_n + b_n \to a + b$

הוכחה:

יהי $\epsilon > 0$ נמצא N שממנו ואילך מתקיים $|(a_n + b_n) - (a+b)| \le \epsilon$

נתון כי קיים N_1 כך שלכל $n \ge N_1$ אזי $|a_n - a| \le \epsilon$

וכן קיים N_2 כך שלכל $n \ge N_2$ אזי $|b_n - b| \le \epsilon$

ניקח את $N := max\{N_1, N_2\}$ וממנו ואילך מתקיים שני התנאים ולכן:

$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| \le \epsilon + \epsilon = 2 \cdot \epsilon$ וסיימנו.

(ב) מכפלה: אם $a_n \to a$ וכן $b_n \to b$ אז: $a_n \cdot b_n \to ab$

הוכחה:

$|a_n \cdot b_n - ab| \le |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - ab| = |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$

כעת $b_n \le c$ כי מN כלשהו ואילך כל סדרה מתכנסת חסומה

ולכן $|b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \le c \cdot \epsilon + |a| \cdot \epsilon = (c + |a|) \cdot \epsilon$

(ג) מנה: אם $a_n \to a \neq 0$ וכן $b_n \to b$ אז: $\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{a}$

הוכחה:

מספיק להוכיח אם $a_n \to a \neq 0$ אז $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ ואז נפעיל כפל עם b_n.

קל להוכיח כי אם $a_n \to a \neq 0$ אז $|a_n| \to |a| > 0$ (מאי שיוויון המשולש) ואז יש N שממנו ואילך $|a| - \frac{|a|}{2} \le a_n \le \mid a \mid + \frac{|a|}{2}$

ואז: $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - a_n}{a \cdot a_n}| \le \epsilon \cdot \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|a_n|} \le \epsilon \cdot \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|a|/2} = \epsilon \cdot \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} = \frac{2}{a^2} \cdot \epsilon$ וסיימנו.

5) כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

<u>הוכחה:</u> תהי a_nמונוטונית וחסומה נוכיח עבור עולה, הכיוון השני דומה. נסמן $s := sup\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$
יהי $\epsilon > 0$ נמצא N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - s| \leq \epsilon$ שקול ללהוכיח $s - \epsilon \leq a_n \leq s + \epsilon$
ידוע כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq s < s + \epsilon$ מהגדרת החסם העליון. כעת ניקח N כך ש$s - \epsilon \leq a_N$ ואז הסדרה עולה ולכן $s - \epsilon \leq a_N \leq a_n \leq s + \epsilon$.

6) גבולות שומרים על אי שיוויון חלש

אם $b \leftarrow a_n \leq b_n \to b$ a אזי $a \leq b$

<u>הוכחה:</u> נניח בשילה $a > b$ וניקח $\epsilon < \frac{a-b}{2}$
קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon \Longleftarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$
מצד שני, קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|b_n - b| < \epsilon \Longleftarrow b - \epsilon < b_n < b + \epsilon$
$[b + \epsilon < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < a - \epsilon]$
לכן $b_n < b + \epsilon < a - \epsilon < a_n$ בסתירה.

7) משפט הסנדוויץ'

אם $c \leftarrow a_n \leq c_n \leq b_n \to c$ אזי $c_n \to c$

<u>הוכחה:</u>
קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - c| \leq \epsilon \Longleftarrow c - \epsilon \leq a_n \leq c + \epsilon$
מצד שני, קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|b_n - c| \leq \epsilon \Longleftarrow c - \epsilon \leq b_n \leq c + \epsilon$
לכן ניקח $N := max\{N_1, N_2\}$ והחל ממנו ואילך
$c - \epsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n < c + \epsilon$ ולכן $c_n \to c$.

8) לכל $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ התכונות הבאות שקולות:

(א) a הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n)
(ב) לכל סביבה U של a, יש אינסוף ערכי n שעבורם $a_n \in U$

<u>הוכחה:</u>
<u>א⇐ב:</u> תהי $a_{m_n} \to a$ ותהי Uסביבה של a מהלמה יש N כך שלכל $n \geq N$ אז $a_{m_n} \in U$ $(m_1 < m_2 < ...)$, יש כאן אינסוף מקמות בסדרה שאיברם שייך לU
<u>ב⇐א:</u> $(a-1, a+1)$ הינה סביבה של a ומהנתון יש m_1 כך ש$a_{m_1} \in (a-1, a+1)$
$(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ הינה סביבה של a ומהנתון יש m_2 כך ש$a_{m_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$
.
.

.

$(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})$ הינה סביבה של a ומהנתון יש m_n כך ש$a_{m_n}\in(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})$

וכן $m_1,...,m_n\}$ $m_{n+1}\in\{k|a_k\in(a-\frac{1}{n+1},a+\frac{1}{n+1})$ וכעת מסנדוויץ' $a-\frac{1}{n}\le a_{m_n}\le a+\frac{1}{n}$ סיימנו.

9) לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית

לצורך ההוכחה: **הגדרה: פסגה** של הסדרה a_n אם לכל $m\ge k$ מתקיים $a_m\le a_k$

הוכחה:

אם יש בסדרה אינסוף פסגות ... $a_{m_1},a_{m_2},$ כך ש... $m_1<m_2<$ אז סיימנו כי קיבלתי ת"ס מונוטונית יורדת.

אחרת, יש כמות סופית של פסגות ובפרט יש N כך שלכל $n\ge N$ אין פסגות. ניקח $m_1\ge N$ וכן a_{m_1} אינו פסגה ולכן קיים $m_2>m_1$ כך ש $a_{m_2}>a_{m_1}$ וכן a_{m_2} אינו פסגה...

לכן קיימת סדרה עולה ממש (a_{m_n}) המורכבת מהאיברים הללו.

10) משפט בולצאנו-ויירשטראסט

לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת

הוכחה:

מהלמה שהוכחנו קיימת לה ת"ס מונוטונית אשר חסומה גם היא ולכן סה"כ תת הסדרה מתכנסת.

11) קריטריון קושי להתכנסות סדרות

הסדרה (a_n) מתכנסת$\Longleftrightarrow$לכל $\epsilon>0$ קיים $N>0$ כך שלכל $N\le m,n$ מתקיים $|a_n-a_m|\le\epsilon$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח $a_n\to a\in\mathbb{R}$. יהי נתון $\epsilon>0$ אזי קיים N כך שממנו ואילך לכל $n,m\ge N$ מתקיים: $|a_n-a|,|a_m-a|<\epsilon$

ומאי שיוויון המשולש $|a_n-a_m|\le|a_n-a|+|a-a_m|\le\epsilon+\epsilon=2\cdot\epsilon$

($\Rightarrow$) - הסדרה (a_n) חסומה, נוכיח:

ניקח $\epsilon=1$ ו-N שממנו ואילך מתקיים תנאי קושי, כלומר לכל $n,m\ge N$ מתקיים: $|a_n-a_m|\le\epsilon$. כעת בפרט ניקח $n,N\ge N$ ומתקיים $|a_n-a_N|\le 1$ כלומר לכל $n\ge N$: $a_N-1\le a_n\le a_N+1$ -זנב הסדרה חסום ולכן כולה.

מבולצאנו ויירשטראס קיימת ת"ס $a_{m_n}\to a$. יהי $\epsilon>0$:

קיים N_1שממנו ואילך $|a_{m_n}-a_n|\le\epsilon$ מהנתון.

קיים N_2שממנו ואילך $|a_{m_n}-a|\le\epsilon$ מהגדרת התכנסות.

וניקח $N:=max\{N_1,N_2\}$ כך שממנו ואילך שני התנאים מתקיימים ולכן מאי שיוויון המשולש $|a_n-a|\le|a_n-a_{m_n}|+|a_{m_n}-a|\le\epsilon+\epsilon=2\cdot\epsilon$.

12) הסדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\Longleftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם סדרה מתכנסת אז יש לה גבול חלקי יחיד וממילא זהו כבר הגבול העליון והתחתון שלה

($\Rightarrow$) נסמן $a = \liminf_{x\to\infty} a_n = \limsup_{x\to\infty} a_n$ כאשר $a \in \mathbb{R}$ צ"ל $a_n \to a$. תהי $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ סביבה של a.

נניח בשלילה שהקבוצה $I := \{n | a_n \le a-\epsilon\} \cup \{n | a_n \ge a+\epsilon\}$, נניח למשל שאחת הקבוצות אינסופית, למשל $a_n \le a-\epsilon$ עבור אינסוף ערכי n.

נמספר $I_0 := \{m_1, m_2, ...\}$ נקבל ת"ס $b_n := a_{m_n} \le a-\epsilon$ ומתקיים $\liminf b_n \le a-\epsilon$. אבל ניקח ת"ס של b_nהמתכנסת לגבול התחתון של b_n- נקרא לה b_{k_n}

ולכן b_{k_n}ת"ס של b_nשל a_nוקיבלנו גבול חלקי $\ge a-\epsilon > a$ בסתירה.

13) הטור ההרמוני מתבדר $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}$

הוכחה:

בעזרת קריטריון קושי לסדרת הסכומים החלקיים. נראה שהיא אינה מקיימת את קריטריון קושי:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

(בעזרת מבחן העיבוי ניתן להוכיח $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \Longleftrightarrow \alpha \ge 1$)

14) מבחני ההשוואה

משפט: (מבחן ההשוואה) אם $0 \le a_n \le b_n$ אז $\sum a_n \le \sum b_n$

הוכחה:

$a_1 + ... + a_k \le b_1 + ... + b_k$ נשאיף $k \to \infty$

$\sum a_n \le \sum b_n$ (גבולות שומרים על אי שיוויון חלש).

משפט: (מבחן ההשוואה הגבולי) עבור טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$ כך ש $\frac{a_n}{b_n} \to c$ $(0 < c < \infty)$ אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה:

ניקח $0 < \epsilon$ כך ש$c - \epsilon > 0$ ומהנתון לבסוף $0 < c-\epsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le c+\epsilon \Leftarrow 0 < (c-\epsilon)\cdot b_n \le a_n \le (c+\epsilon)\cdot b_n$ ומלמה (מסקנה ממבחן ההשוואה), הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

15) מבחן השורש

למה $\limsup x_n < 1 \iff$קיים $q<1$ כך שלבסוף $x_n \le q$

הוכחה:

$\Rightarrow$ תהי (x_{n_m}) ת"ס מתכנסת במובן הרחב. נאמר $x_{m_n} \to a$ אבל לבסוף $x_{m_n} \le q$ וגבולות שומרים על אי שיוויון חלש ולכן $a \le q < 1$.

$\Leftarrow$ <u>אם $a=-\infty$:</u> ניקח $q=0$ ואז נניח בשלילה $x_n > 0$ לאינסוף ערכי n. תהי (b_n) ת"ס של (x_n) המורכבת מכל האיברים הללו (הגדולים מאפס), וניקח (c_n) ת"ס שלה-

כעת מתקיים $c_n \to c$ וכן $0 \le c \le \limsup x_n \le -\infty$ בסתירה.

<u>אם $-\infty < \limsup x_n = a < 1$:</u> נקבע $\epsilon > 0$ כך ש$q := a+\epsilon > 1$. נראה כי לבסוף $x_n \le q$: נב"ש קיימים אינסוף $x_n > q$ וניקח ת"ס מתכנסת $q < c_n \to c$ ואז $a - \epsilon = q \le c \le \limsup x_n = a$.

בסתירה כמובן.

<u>משפט (מבחן השורש)</u> עבור טור חיובי $\sum a_n$

(א) אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n < \infty$

(ב)אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n = \infty$

הוכחה:

(א) מהנתון קיים $q<1$ כך שלבסוף $\sqrt[n]{a_n} < q$ כלומר $a_n < q^n$ ולפי מבחן ההשוואה עם הטור ההנדסי סיימנו.

(ב) מהנתון $\sqrt[n]{a_n} > 1$ לאינסוף ערכי n, ולכן $a_n > 1$וכן a_n לא שואף לאפס וכן $\sum a_n = \infty$.

16) מבחן המנה

אם $a_n > 0$ לכל n

(א) אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הטור מתכנס $\sum a_n < \sum \infty$

(ב) אם לבסוף $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ אז הטור מתבדר.

הוכחה:

(א) יש $q<1$ כך שלבסוף $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$כלומר $a_{n+1} < qa_n$. נתבונן בזנב של הטור ונסמנו $\sum b_n$ המקיים $b_{n+1} < qb_n < \ldots < q^{n-1} \cdot b_1$ (נסתכל על הטור ההנדסי שכן $0 < q < 1$)

6^מ-

$$\sum b_n \le \sum q^{n-1} b_1 < \infty$$

לפי מבחן ההשוואה, וכיוון שזה זנב גם $\sum a_n < \infty$.

(ב) יש N שממנו ואילך $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ אז $0 < a_N \le a_{N+1} \le \ldots$ לכן a_n לא שואף לאפס וכן $\sum a_n = \infty$.

17) חוק הקיבוץ

(א) **לטור כללי-** הכנסת סוכריים לטור מתכנס במובן הרחב לא משנה את סכומו

(ב) **לטור חיובי-** גם מחיקת סוגריים לא משנה את סכומו

הוכחה:

(א) צ"ל לכל סדרה $1 = m_1 < m_2 < \dots$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty}(a_{m_i} + \dots + a_{m_{i+1}-1})$

יהיו S_k סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ ו-t_k סדרת הסכומים החלקיים של $\sum b_i$

לכל k מתקיים: $t_k = (a_{m_1} + \dots + a_{m_2-1}) + (a_{m_k} + \dots + a_{m_{k+1}-1}) = a_1 + \dots + a_{m_{k+1}-1} \to \sum a_n$ (לפי קיבוץ בסכום סופי).

(ב) הטורים חיוביים ולכן מתכנסים במובן הרחב, הוכחנו את החלק הראשון. כמו כן, נסתכל על הסדרה $t_k = S_{m_{k+1}-1}$ ונשאיף $k \to \infty$ ולכן $\sum a_n = \sum b_i$.

18) מבחן העיבוי

אם הסדרה (a_n) חיובית ויורדת אז הטורים $\sum a_n, \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה:

$\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n} = a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots \le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots = \sum 2^n a_{2^n}$

ממבחן ההשואה

אם $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$ אז גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n < \infty$ אז גם הטור $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס, וכפל בקבוע לא משנה התכנסותו של טור ולכן $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$.18) מבחן העיבוי

אם הסדרה (a_n) חיובית ויורדת אז הטורים $\sum a_n, \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה:

$\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n} = a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots \le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots = \sum 2^n a_{2^n}$

ממבחן ההשואה

אם $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$ אז גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n < \infty$ אז גם הטור $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס, וכפל בקבוע לא משנה התכנסותו של טור ולכן $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$.

19) משפט לייבניץ

אם הסדרה (a_n) חיובית ויורדת לאפס $a_n \searrow 0$ אז

(א) הטור $\sum (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס

(ב) שאריות הטור מקיימות $|r_k| \le a_{k+1}$ (כלומר, $S_k - a_{k+1} \le S \le S_k + a_{k+1}$)

הוכחה:

(א) לכל k: $S_{2k} = (a_1 - a_2) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k})$ זהו סכום סופי, והמחוברים בו גדולים מאפס (בגלל שיורדת),

כמו כן $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} + a_{2k+2})$ ומירידת הסדרה, המחובר חיובי ולכן סדרת הסכומים החלקיים (עד מס' זוגי) סדרה עולה.

$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$, כל אחד מהמחוסרים מ$a_1$ חיובי ולכן סה"כ גם חסומה.

סה"כ קיבלנו S_{2k} מתכנסת אבל $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{k+1}$ ומתקיים $a_{k+1} \to 0$ ולכן הסכומים שואפים לאותו דבר וסיימנו.

(ב) יהי k נתון, נסתכל על הזנב $r_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ עבור k אי-זוגי, נקבל מקרה פרטי של מה שהוכחנו.

כי $a_{k+1} \geq r_{k+1} = a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3}...$ (האיבר הראשון של הטור אשר חוסם אותו).

עבור k אי זוגי $r_k = -(a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - ...)$ והראינו כי $a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - ... \geq a_{k+1}$.

לכן $-a_{k+1} \leq r_k \leq 0$. לסיכום, סיימנו $|r_k| \leq a_{k+1}$ לכל k ($S = S_k + r_k$ ומקבלים $S_k - a_{k+1} \leq S_k + a_{k+1}$).

20) טור מתכנס בהחלט, מתכנס

הוכחה:

נתון $\sum |a_n| < \infty$ נוכיח התכנסות $\sum a_n$ בעזרת קריטריון קושי.

יהי $\epsilon > 0$ מקושי עבור $\sum |a_n|$, יש N שממנו ואילך

$$|a_{m+1} + ... + a_n| \leq ||a_{m+1}| + ... + |a_n|| \leq \epsilon$$

לכן $\sum a_n$ מקיים את קריטריון קושי.

21) מבחן דיריכלה

משפט (מבחן דיריכלה) אם $a_n \to 0$ מונוטונית והטור $\sum b_n$ חסום אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה:

מספיק להוכיח כאשר $a_n \searrow 0$ ונראה התקיימות תנאי קושי. יהיו $m < n$

$$|b_{m+1}a_{m+1} + ... + b_n a_n| = |S_m(-a_{m+1}) + S_{m+1}(a_{m+1} - a_{m+2}) + ... + S_{n-1}(-a_n) + S_n a_n| \leq |S_m|$$

$$|S_m||(-a_{m+1})| + |S_{m+1}||(a_{m+1} - a_{m+2})| + ... + |S_{n-1}||(-a_n)| + |S_n a_n| \leq ca_{m+1} + c(a_{m+1} - a_{m+2}) + ... c(a_{n-1} - a_n) + ca_n = 2c$$

יהי $\epsilon > 0$ וידוע $a_n \to 0$ לכן קיים N שממנו ואילך $a_n \leq \epsilon$ אז לכל $N \leq m \leq n$ ומהחשבון הנ"ל מתקיים

$$|b_{m+1}a_{m+1} + ... + b_n a_n| \leq 2ca_{m+1} \leq 2c\epsilon$$

22) מבחן אבל

משפט (מבחן אבל) אם a_n מונוטונית וחסומה והטור $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה:

(a_n) מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת, נסמן $a_n \to a$ אזי הסדרה $(a_n - a) \to 0$ ומונוטונית.

(b_n) מתכנס ובפרט חסום ומדיריכלה מתקיים $\sum b_n(a_n - a)$ מתכנס, וכן מתקיים $\sum b_n$ מתכנס.

לכן גם הטור $\sum b_n a_n - ab_n + ab_n < \infty$ מתכנס, וסיימנו.

23) חוק החילוף

למה שינוי סדר האיברים בטור חיובי אינה משנה את סכומו (לכל תמורה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$)

הוכחה:

יהי נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, נוכיח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$:

נסמן $S_k^{\sigma} = a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(k)}$, יהי $k \in \mathbb{N}$ וניקח $l \geq max\{\sigma(1), ..., \sigma(k)\}$ ומתקיים $S_k^{\sigma} \leq S_l$

נשאיף $l \to \infty$ לקבלת $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. זה מספיק משום שמפעילים את הטענה על $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(\sigma(n))}$וזה מתקיים בפרט עבור התמורה ההפוכה σ^{-1}.

וסה"כ הם שווים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

משפט (חוק החילוף) שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בהחלט לא משנה את סכומו.

הוכחה:

ראינו $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ בפרט לכל הטור $\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)}$.

שני הטורים הללו חיוביים ולכן $\sum p_n = \sum p_{\sigma(n)}$, $\sum q_n = \sum q_{\sigma(n)}$, ולכן הם גם מתכנסים כי הטור מתכנס בהחלט.=

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} = \sum a_{\sigma(n)}$$

24) חוק החילוף

למה שינוי סדר האיברים בטור חיובי אינה משנה את סכומו (לכל תמורה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$)

הוכחה:

יהי נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, נוכיח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$:

נסמן $S_k^{\sigma} = a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(k)}$, יהי $k \in \mathbb{N}$ וניקח $l \geq max\{\sigma(1), ..., \sigma(k)\}$ ומתקיים $S_k^{\sigma} \leq S_l$

נשאיף $l \to \infty$ לקבלת $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. זה מספיק משום שמפעילים את הטענה על $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(\sigma(n))}$וזה מתקיים בפרט עבור התמורה ההפוכה σ^{-1}.

וסה"כ הם שווים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

<u>משפט (חוק החילוף)</u> שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בהחלט לא משנה את סכומו.

<u>הוכחה:</u>

ראינו $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ בפרט לכל הטור $\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)}$.

שני הטורים הללו חיוביים ולכן $\sum p_{\sigma(n)} = \sum p_n$, $\sum q_{\sigma(n)} = \sum q_n$, ולכן הם גם מתכנסים כי הטור מתכנס בהחלט.=

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} = \sum a_{\sigma(n)}$$

25) שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בתנאי

<u>למה</u> אם בטור מתכנס עם סוגריים, בכל סוגריים המחוברים מאותו סימן אז הכנסת סוגריים לא תשנה את סכומו.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty}(a_{m_i} + ... + a_{m_{i+1}-1})$, נסמן $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty}(a_{m_i} + ... + a_{m_{i+1}-1})$

לכל k יהי $i = i(k)$ כך ש$m_i \leq k \leq m_{i+1}$ אז

$$|(b_1 + ... + b_i) - (a_1 + ... + a_i)| = [a_{k+1} + ... + a_{m_{i+1}-1}] \leq |b_i| \to 0$$

(כאשר $k \to \infty$ גם $i \to \infty$)

כעת, $\sum b_i - \sum a_n \leftarrow (b_1 + ... + b_i) - (a_1 + ... + a_i) \to 0$

ומתקיים $\sum b_i < \infty$ לכן גם $\sum a_n < \infty$ ושווה לו וסה"כ

$$\sum a_n = \sum b_i$$

26) לשון $\delta - \epsilon$ שקול להיינה

א) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (כלומר לכל סדרה בdom(f) $a \neq a_n \to a$ מתקיים $f(a_n) \to b$)

ב) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{0<|x-a|<\delta} : |f(x) - b| < \epsilon$

<u>הוכחה</u>

<u>ב⇐א:</u> תהי $a \neq x_n \to a$ צ"ל $f(x_n) \to b$. יהי $\epsilon > 0$ והמנתון קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - b| < \epsilon$.

מתקיים כי $0 < x_n - a \to 0$ לכן לבסוף $|f(x_n) - b| < \epsilon$ כלומר $f(x_n) \to b$.

<u>א⇐ב:</u> נניח בשלילה $\exists_{\epsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{0<|x-a|<\delta} : |f(x) - b| \geq \epsilon$. יהי $n \in \mathbb{N}$ וניקח $\delta := \frac{1}{n}$ וx_nכך שמתקיים $0 < |x_n - a| < \delta$ ועדיין $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$.

קיבלנו סדרה $a \neq x_n \to a$ כך ש$|f(x_n)-b| \geq \epsilon$ כלומר $f(x_n)$לא שואף לb בסתירה.

27) ניסוחים שקולים לרציפות פונקציות

א) f רציפה בנק' a כלומר: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ב) לכל סדרה $x_n \to a$ מתקיים $f(x_n) \to f(a)$

ג) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{0<|x-a|<\delta} : |f(x)-f(a)| < \epsilon$

ד) $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

הוכחה

ב$\Leftarrow$א מיידי

א$\Leftarrow$ב תהי $x_n \to a$,

אם יש כמות סופית של שווים\שונים מa, מסתכלים על הזנב והסדרה שואפת ל$f(a)$

אחרת, נפצל לשתי ת"ס, אלה ששווים לa ושונים מa.ושתיהן מתכנסות לאותו גבול ומכסות את הסדרה.

ג$\Leftarrow$א מיידי

א$\Leftarrow$ג נותר לבדוק את המקרה $|x-a| = 0$ כלומר $x = a$ אבל אז $|f(x)-f(a)| = 0 < \epsilon$

ד$\Leftarrow$א תהי $a \neq x_n \to a$ צ"ל$f(x_n) \to f(a)$. נסמן $h_n := x_n - a \to 0$ ומהנתון $f(a+h_n) \to f(a)$

א$\Leftarrow$ד תהי $0 \neq h_n \to 0$ ונסמן $x_n := h_n + a$ וכעת $f(a+h_n) = f(x_n) \to f(a)$

28) משפט ערך הביניים

אם f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ו$f(a) < f(b)$ אז לכל מס' ממשי $f(a) < d < f(b)$ יש נק' $a < c < b$ כך ש$f(c) = d$.

הוכחה

ראשית, אם קיים $s := supA$ אז יש $s \geq a_n \in A$ וגם $a_n \to s$.

יהי $c := sup\{x \in [a,b] | f(x) \leq d\}$ (קב' זו חסומה ע"י b וכן $d < f(a)$ ולכן שייכת לקבוצה, אינה ריקה).

תהי $c \geq x_n \to c$ מרציפות מתקיים $f(x_n) \leq d \leftarrow c$.

נניח בשלילה $f(c) < d$, $f(c) < f(b)$ לכן $c \neq b$ וכן $c < b$,

תהי $b > t_n \to c^+$ אזי $f(t_n) \to f(c) < d$ ולכן לבסוף $f(t_n) < d$

למרות ש$c < t_n$ אשר הוא הsup. בסתירה. לכן $f(c) = d$.

29) משפט ויירשטראס

פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום גלובליים שם.

הוכחה

תהי f רציפה $[a,b]$, f <u>חסומה בקטע</u>

נב"ש $\{f(x)|x \in [a,b]\}$ אינה חסומה מלעיל. לכל n קיים $a \le x_n \le b$ כך ש $f(x_n) > n$.
אבל $\{x_n\}$ חסומה לכן לפי בולצאנו ויירשטראס יש ת"ס מתכנסת $x_{n_k} \to x_0$ כך ש $a \le x_0 \le b$. f רציפה ולכן $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} f(x_0)$.
זו סתירה כי כת"ס גם $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} \infty$.
נראה שקיים מקסימום
f חסומה ולכן $s := sup\{f(x)|a \le x \le b\}$ קיים, ניקח סדרה מהקב' $s \to f(x_n) \ge s$.
$a \le x_n \le b$ לכל n לכן יש לה ת"ס מתכנסת $t_n \to c$, $s \leftarrow f(t_n) \to f(c)$
סה"כ $f(c) = s$ וזוהי נק' מקסימום גלובלית. באותו אופן, מינימום...

30) רציפות במידה שווה

f רמב"ש בקב' $X \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1,x_2\in X:|x_!-x_2|\le\delta}|f(x_1)-f(x_2)| < \epsilon$
הוכחה
$\Leftarrow$ נב"ש $\exists_{\epsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x_1,x_2\in X:|x_!-x_2|\le\delta}|f(x_1)-f(x_2)| \ge \epsilon$ לכל n עבור $\delta := \frac{1}{n}$ יש $a_n, b_n \in X$
אם $|a_n - b_n| \le \frac{1}{n}$ ועדיין $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$ סתירה
(כי לפי סנדוויץ' $|a_n - b_n| \to 0$ ו $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$ לא שואף לאפס.
$\Rightarrow$ יהיו $a_n, b_n \in X$ כך ש $|a_n - b_n| \to 0$ נוכיח $|f(a_n) - f(b_n)| \le \epsilon$
יהי $\epsilon > 0$ ניקח $\delta > 0$ כנתון ולבסוף $|a_n - b_n| < \delta$ ולכן $|f(a_n) - f(b_{n)}| < \epsilon$

31) משפט קנטור

פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה בו במ"ש
הוכחה
תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ נב"ש שאינה רציפה שם. כלומר יש בקטע סדרות a_n, b_n כך ש $|a_n - b_n| \to 0$
אבל $|f(a_n) - f(b_n)|$ לא שואף לאפס. ניקח $\epsilon > 0$ כך ש $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$ לאינסוף ערכי n ונמספרם. $m_1 < m_2 < \ldots$
אז $|f(a_{m_n}) - f(b_{m_n})| \ge \epsilon$ לכל n למרות ש $|a_{m_n} - b_{m_n}| \to 0$.
תהי c_{k_n} ת"ס מתכנסת של a_{m_n}, וכן d_{k_n} של b_{m_n}
f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ לכן $f(c_{k_n}) \to f(c)$, $|c_{k_n} - d_{k_n}| \to 0$ ולכן $d_{k_n} \to f(c)$.
מקבלים $\epsilon \le |f(c_{k_n}) - f(d_{k_n})| \to 0$ בסתירה.

32) משפט פרמה

אם c נק' מקסימום או מינימום של f בקטע פתוח והנגזרת $f'(c)$ קיימת- אזי $f'(c) = 0$
הוכחה
תהי c נק' מקסימום של f בקטע פתוח $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

כש$h \to 0^+$ מתקיים $f'(c) \geq 0$
כש$h \to 0^-$ מתקיים $f'(c) \leq 0$
ולכן $f'(c) = 0$. עבור מינמום דומה...

33) משפט רול

אם f רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b)וכן $f(a) = f(b)$ אז יש $a < c < b$ כך ש$f'(c) = 0$

הוכחה

f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע, אם הם שווים- היא קבועה. אחרת, לפחות אחוד מהם בתוך הקטע הפתוח.

34) משפט הערך הממוצע (לגרנז')

אם f רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b)וכן $f(a) = f(b)$ אז יש $a < c < b$ כך ש $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הוכחה

נגדיר $l(x) := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$
ואז $h(x) := f(x) - l(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ והיא מקיימת את תנאי משפט רול, לכן קיים $a < c < b$
כך ש$h'(c) = 0$. כלומר $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ולכן סיימנו.

35) משפט הערך הממוצע המוכלל (קושי)

אם f, g רציפות ב$[a,b]$ וגזירות ב(a,b)וכן $g(x) \neq 0$ אז יש $a < c < b$ כך ש$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

הוכחה

$g(b) \neq g(a)$. ניקח $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ לפי רול קיים c כך ש$h'(c) = 0$
כלומר$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g'(c))$ וסיימנו.