הרצאה 20

29 בדצמבר 2013

$$f \to min, max$$
$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ .... \\ \Phi_m(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases}$$
$$\Phi_j \in C^r$$

$\Phi = (\Phi_1,..,\Phi_m)$ רגולרית על $M = \{\Phi = 0\}$

אם a נק' קיצון מקומי עם תנאי $\Phi = 0$ אז $\nabla f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla \Phi_i$

כלל כופלי לגראנז'

$$f \to max, min$$
$$\Phi_1(x) = ... = \Phi_m(x) = 0$$

$L := f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i$ -פונ' לגראנג'

a-נקודת קיצון $\Leftarrow \nabla L(a) = 0$

$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ ... \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \Phi_1(x) = 0 \\ ... \\ \Phi_m(x) = 0 \end{cases}$ $n+m$ משוואות עבור $x_1,..,x_n,\lambda_1,..,\lambda_m$

דוגמא

$$u = x - 2y + 2z$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$L = x - 2y + 2z - \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$
$$\begin{cases} L'_x = 1 - 2\lambda x = 0 & \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} \\ L'_y = -2 - 2\lambda y = 0 & \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \\ L'_z = 2 - 2\lambda z = 0 & z = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$
$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2}$$
$$x = \pm\frac{1}{3}, y = \mp\frac{2}{3}, z = \pm\frac{2}{3}$$
$$a_{1,2} = \left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\right)$$
$$f(a_1) = 3, f(a_2) = -3 \Rightarrow \max_{s^2} f = 3, \min_{s^2} f = -3$$

דוגמא

$$f(x,y,z) = xyz$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
$$L = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z)$$
$$\begin{cases} L'_x = yz - 2\lambda x - \mu = 0 \\ L'_y = xz - 2\lambda y - \mu = 0 \\ L'_z = xy - 2\lambda z - \mu = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xyz - 2\lambda x^2 - \mu x = 0 \\ xyz - 2\lambda y^2 - \mu y = 0 \\ xyz - 2\lambda z^2 - \mu z = 0 \end{cases}$$
$$\oplus\, 3xyz - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}xyz$$

$$yz=\frac{2\lambda}{3x}, yz-2\lambda x-\mu=0\Rightarrow\frac{2\lambda}{3x}-2\lambda x-\mu=0\Rightarrow\begin{cases}2\lambda-6\lambda x^2-3\mu x=0\\ \lambda y-6\lambda y^2-3\mu y=0\\ 2\lambda-6\lambda z^2-3\mu z=0\end{cases}\Rightarrow x=y\vee x=z\vee y=z$$

נראה עבור $x=y$

$$\begin{cases}2x^2+z^2=1\\ 2x+z=0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{z}{2}\Rightarrow 2\frac{z^2}{4}+z^2=1\Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, x=y=\mp\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}=...=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

קיצונים על תחום

$\partial\Omega$-משטח דיפרנציאבלי

$f\in C^1(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$-קומפקט. לפי משפט Weirtstrass $\exists\max_{x\in\bar{\Omega}}f(x)=f(x_{max}), \min_{x\in\bar{\Omega}}f(x)=f(x_{min})$

$a_{max}\in\Omega\Rightarrow\nabla f(a_{max})=0$, $a_{max}\in\partial\Omega\Leftarrow a_{max}$נק' קיצון מקומי עם התנאי $\Phi=0$

$a_1,..,a_n$נקודות קריטיות $\nabla f(a)=0$

$max(f(a_1),...,f(a_n))=\max_{x\in\Omega}f(x)$

תרגיל

$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$

$x^2+y^2\le 25$

$\max f(x,y)=?, \min f(x,y)=?$

$$\begin{cases}f'_x=2x-12=0 & x=6\\ f'_y=2y+16=0 & y=-8\end{cases}\Rightarrow a=(6,-8)$$

על השפה: $x^2+y^2=25$

$f|_{x^2+y^2=25}=25-12x+16y$

$(6,-8)\notin\bar{\Omega}$

$L=25-12x+16y-\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$

$L'_x=-12-2\lambda x=0$

$L'_y=16-2\lambda y=0$

$x=-\frac{6}{\lambda}, y=\frac{8}{\lambda}$

....

$b_{1,2}=(\mp3,\pm4)$

תרגיל להגשה (בונוס)

$a_i,x_i\ge 0$

הוכח כי $\sum_{i=1}^n a_ix_i\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ עבור $p,q\ge1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$|(a,x)|\le||a||_p\,||x||_q$

רמז:

$f(x)=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\to min$ על תנאי $\sum_{i=1}^n a_ix_i=A$ $(x_i\ge0)$

פרק 4 אינטגרציה ב$\mathbb{R}^n$ - אינטגרל של Riemann-Darboux

קטע n מימדי

$n=1:[a,b]$

$n>1\Rightarrow P=[a_1,b_1]\times...[a_n,b_n]=\{x=(x_1,...,x_n):a_i\le x_i\le b_i, i=1,...,n\}$

נפח של P

$V(P)=vol(P)=(b_1-a_1)...(b_n-a_n)$

$\mathring{P}=(a_1,b_1)\times...(a_n,b_n)$

$P\mathring{\cap}Q=\mathring{P}\cap\mathring{Q}$

חלוקה

$$n=1\Rightarrow[a,b]\,,a=x_0<x_1<...<x_N=b,[a,b]=\bigcup_{i=1}^{N}\Delta^{(i)}$$

$$n>1\Rightarrow P=[a_1,b_1]\times...[a_n,b_n]\,,\begin{cases}[a_1,b_1]=\bigcup_{i_1=1}^{n}\Delta_1^{(i_1)}\\ \vdots\\ [a_n,b_n]=\bigcup_{i_n=1}^{n}\Delta_n^{(i_n)}\end{cases}$$

$$P_{i_1,..,i_n}=\Delta_1^{(i_1)}\times...\times\Delta_n^{(i_n)}$$

חלוקה - $\mathcal{P}=\left\{\mathrm{P}_{\mathrm{i}_1,..,\mathrm{i}_\mathrm{n}}\right\}$ של P, בנייה של אינטגרל

הגדרה

תהי פונ' $f:P\to R$.P קטע n ממימדי, f חסומה $M\leq|f(x)|:\forall x\in P$

אם $\mathcal{P}$ חלוקה של P אז סכום עליון:

$\bar{S}(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=1}^{n}M_iV(P_i)$ עבור $M_i=sup_{x\in P_i}f(x)$

סכום תחתון:

$\underline{m_iV(P_i)}(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=1}^{n}M_iV(P_i)$ עבור $m_i=inf_{x\in P_i}f(x)$

$\underline{S}(f,P)\leq\overline{S}(f,P)$

הגדרה

אם $\mathcal{Q},\mathcal{P}$ חלוקות של P אז נגדיר $\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}:=\left\{\mathcal{Q}_i\mathring{\cap}\mathcal{P}_i\right\}$

למה

מלבן n ממימדי P ו$\mathcal{Q},\mathcal{P}$ חלוקות של P, אזי $\underline{S(f,Q)}\leq\overline{s(f,P)}$.