

א. חשבו $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan(x))^x = \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln((\tan x)^x)}$$

נחשב את גבול המעריך,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \tan x = \{0 \cdot (-\infty)\} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan x}{\frac{1}{x}} = \left\{ -\frac{\infty}{\infty}, L'Hopital \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \cos^2(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{\sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 0 \end{aligned}$$

סה"כ הגבול הוא

$$e^0 = 1$$

נסיון *Win* שעכשיו שמתי אליו לב

$$(\tan(x))^x = \left(\frac{\tan(x)}{x} \cdot x \right)^x = \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right)^x}_{\rightarrow 1^0=1} \cdot x^x$$

ב. חשבו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+6} \right)^n$

כיוון ש $\frac{n+2}{n+6} \rightarrow 1$ אפשר להשתמש בכלל ה e

$$\left(\frac{n+2}{n+6} \right)^n \rightarrow e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{n+2}{n+6} - 1 \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{n+2}{n+6} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{4n}{n+6} = -4$$

סה"כ הגבול הוא $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

$$3. \text{ מצאו כל } \alpha \in \mathbb{R} \text{ כך שהטור } \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n-5}}{n^\alpha}$$

א. מתכנס.

ב. מתכנס בהחלט.

ננסה לחשב את הגבול של האיבר הכללי של הטור

$$\frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n-5}}{n^\alpha} = \frac{10}{n^\alpha(\sqrt{n+5} + \sqrt{n-5})} = \frac{10}{n^\alpha \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 - \frac{5}{n}} \right)}$$

בעצם זה חבר של הטור $\sum \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

ולכן כאשר $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ הטור הזה מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט. (כלומר כאשר $\alpha > \frac{1}{2}$)

ובשאר התחום הטור הזה מתבדר ולכן הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

שוב נחזור לחשב את גבול האיבר הכללי של הטור, הפעם בשביל לייבניץ

$$\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{10}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 - \frac{5}{n}}}$$

כאשר $\alpha + \frac{1}{2} \leq 0$ הסדרה אינה שואפת לאפס. והטור מתבדר.

כאשר $\alpha + \frac{1}{2} > 0$ הסדרה שואפת לאפס.

כאשר $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ היא מונוטונית יורדת כי

$$\frac{10}{n^\alpha(\sqrt{n+5} + \sqrt{n-5})}$$

כאשר n גדל המכנה גדל.

ולכן לפי לייבניץ הטור המקורי מתכנס וסה"כ מתכנס בתנאי בתחום זה.

לבסוף אם $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ האיבר הכללי הוא מהצורה

$$\frac{10 \cdot n^{-\alpha}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n-5}}$$

נחקור את הפונקציה הזו ונראה שהיא יורדת החל משלב מסויים, ולכן מדובר בטור לייבניץ

$$f(x) = \frac{10 \cdot x^{-\alpha}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{10}{(\quad)^2} \cdot \left(-\alpha x^{-\alpha-1}(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}) - x^{-\alpha} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x-5}} \right) \right) =$$

$$= \frac{10x^{-\alpha}}{(\quad)^2} \cdot \left[-\frac{\alpha}{x}(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x-5}} \right) \right]$$

המטרה: להראות שהביטוי הבא שלילי החל משלב מסויים

$$\frac{-\alpha}{x}(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x-5}} \right) \leq -\alpha \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}}{x} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x-5}} \right) =$$

$$= \frac{-2\alpha\sqrt{x+5}}{x} - \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{-2\alpha x + 5 - x}{x\sqrt{x+5}} = \frac{5 - x(1 + 2\alpha)}{2x\sqrt{x+5}}$$

המונה שואף למינוס אינסוף כי $1 + 2\alpha > 0$ ולכן הביטוי אכן שלילי החל משלב מסויים!

סיכום השאלה:

$$\frac{1}{2} < \alpha$$

$$-\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\alpha \leq -\frac{1}{2}$$

5. נניח שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת ובעלת נגזרת שנייה רציפה $f''(x)$ בקטע $[0, 3]$. עוד נניח ש- $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$. הוכיחו שקיים $c \in [0, 3]$ כך ש- $f''(c) = 1$. הדרכה: אפשר להסתמך על משפט לגרנג', ז.א. על משפט הערך הממוצע.

$$h''(x) = f''(x) - 1$$

נעביר אגף ונביט בפונקציה

$$h'(x) = f'(x) - x$$

$$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

אנחנו יודעים להציב את 0, 2, 3

$$h(0) = 0$$

$$h(2) = 5 - 2 = 3$$

$$h(3) = 8 - 4.5 = \frac{7}{2}$$

לפי לגראנז' קיימת נקודה $t_1 \in (0, 2)$ וקיימת נקודה $t_2 \in (2, 3)$ כך ש

$$h'(t_1) = \frac{3}{2}$$

$$h'(t_2) = \frac{7}{2}$$

כעת שוב לפי לגראנז'

קיימת נקודה t_3 בה $t_1 < t_3 < t_2$

$$h''(t_3) = \frac{h'(t_2) - h'(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$$

מצד שני

$$h''(0) = -1$$

לפי ערך הביניים כיוון ש h'' רציפה כצירוף רציפות היא חותכת את הציר, משל.