

## מתמטיקה בדידה (88195) – מבחן לדוגמא פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.  
5 השאלות הן שוות-משקל. יש לענות על כולן, כל שאלה בעמוד נפרד.  
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".  
יש להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

*בהצלחה!*

1. נסחו והוכיחו את משפט ארדש-סקרש על תת-סדרות מונוטוניות.

2. הוכיחו או הפריכו:

$$A \times \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i) \quad \text{א.}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right) \quad \text{ב.}$$

3. תהיינה  $\mathbb{R}$  קבוצת המספרים הממשיים,  $\mathbb{Q}$  קבוצת המספרים הרציונליים.  
נגדיר על קבוצת הפונקציות  $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  יחס  $\sim$  ע"י:

$$f \sim g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} (f(x) - g(x) \in \mathbb{Q})$$

א. הוכיחו:  $\sim$  הוא יחס שקילות על  $A$ .

ב. הוכיחו שלכל מחלקות השקילות  $[f]$  יש אותה עוצמה. מהי?

ג. מצאו את עוצמת קבוצת המנה  $A/\sim$ .

4. יהי  $\triangleleft$  היחס על הקבוצה  $P = \{1, \dots, 6\}$  המוגדר על ידי:

$$m \triangleleft n \Leftrightarrow (m = n \vee m + 2 \leq n)$$

א. הוכיחו:  $\triangleleft$  הוא יחס סדר חלקי על  $P$ .

ב. ציירו את דיאגרמת הסה של  $(P, \triangleleft)$ .

ג. רשמו שתי שרשראות מקסימליות באורכים שונים ב- $P$ .

5. מצאו כמה מהמספרים השלמים בין 1 ל-1000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3, 4, 5.