

הגדרה: נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X . אומרים ש- β עידון של α אם מתקיים – $\forall B \in \beta \exists A \in \alpha: B \subseteq A$
 נסמן: $\beta < \alpha$.

דוגמה טריוויאלית: $\beta < \alpha$ אז $\beta \subseteq \alpha$

דוגמה: $\forall 0 < r_1 < r_2 \quad \{B_{r_1}(x) : x \in X\} > \{B_{r_2}(x) : x \in X\}$

הגדרה: נניח (X, d) מ"מ, α כיסוי פתוח של X . אומרים ש α הוא δ -אחיד

אם מתקיים $\{B_\delta(x) | x \in X\} < \alpha$

אומרים כיסוי אחיד (*uniform covering*) אם הוא δ -אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא מספר לבג (*Lebesgue*) של כיסוי α אם כל תת קבוצה B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α .

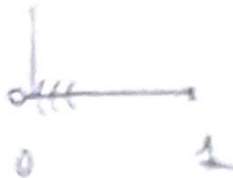
(ז"א $\text{diam} B < \delta \Rightarrow \{B\} < \alpha$)

הערות:

(1) אם $0 < \delta$ מספר לבג של α , אז כל δ_1 כך ש- $0 < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

(2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג $= \delta$.

(3) דוגמה: כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.



$$A_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right] \quad X = (0, 1] \notin \text{Comp}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \alpha := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

כיסוי פתוח של $(0, 1]$. אבל אין מספר לבג עבור α .

אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל- α ,

$$A := B_{\frac{\delta}{5}}\left(\frac{\delta}{5}\right) = \left(0, \frac{3}{5}\delta\right) - \text{נגדיר}$$

$$\text{diam}(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta \text{ אז}$$

אבל A לא מוכל באף איבר של α .

משפט: (מספר Lebesgue)

נניח (X, d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$$diam(A_n) < \frac{1}{n} \text{ אבל } A_n \text{ לא מוכל באף איבר של } \alpha.$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

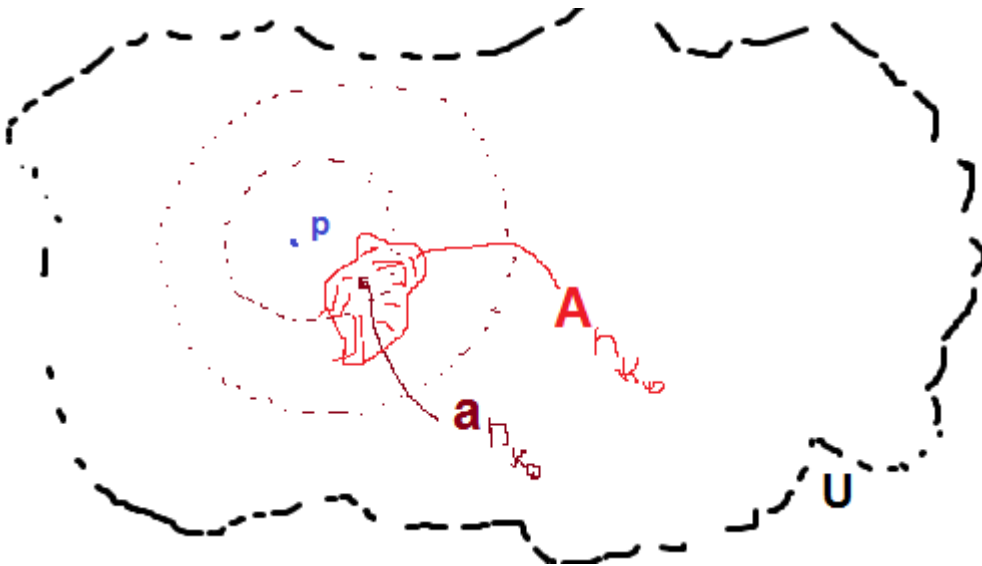
נתון ש $X \in SComp$ הוא מטריזובילי לכן גם $X \in SComp$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = p$.

α כיסוי. קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $diam(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)



$$\forall x \in A_{n_{k_0}} \quad d(p, x) \leq d(p, a_{n_{k_0}}) + d(a_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

נקבל $A_{n_{k_0}} \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq U \in \alpha$. אז גם $A_{n_{k_0}} \subseteq B_\varepsilon(p)$ סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!



תוצאה: אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} < \alpha$

משפט: נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f: X \rightarrow Y$ רציפה במידה שווה.

הוכחה: נניח $\varepsilon > 0$. ש"ל שקיים $\delta > 0$ כך שמתקיים:

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha := \{f^{-1}(B_\varepsilon(y)) : y \in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1, x_2) < \delta$. אז $diam\{x_1, x_2\} < \delta$. לכן קיים $y \in Y$ כך ש

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

$$\{f(x_1), f(x_2)\} \subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subseteq B_\varepsilon(y) \quad \text{אז}$$

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq diam(B_\varepsilon(y)) \leq 2\varepsilon \quad \text{לכן}$$



תרגיל: נניח (X, d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $x, y \in X$ כך ש –

$$diam(X) = d(x, y)$$

סקיצה: $X \times X \in Comp$ ו $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ רציפה (מדוע?) ...

הגדרה: פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in Comp \cap T_2$.

דוגמאות:

$$i: (-1, 1) \rightarrow [-1, 1] \quad \text{"(דו-נקודתית)"}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow B_1[0] \quad f(v) = \frac{v}{1+|v|}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \quad f(n) = \frac{1}{n} \quad \text{"(חד-נקודתית)"}$$

תרגיל* (יהיה בתירגול) -- קומפקטיפיקציה חד-נקודתית (Alexandroff)

נניח (X, τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p \notin X$ ("נקודת האינסוף").

בקבוצה $X^* = X \cup \{p\}$ נגדיר $\tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus K : K \text{ is compact}\}$.

הוכיחו:

$$1. (X^*, \tau^*) \in \text{Comp} \cap T_2.$$

2. פונקציית ההכלה $i: X \rightarrow X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

דוגמאות:

$$X = \mathbb{R}^n \text{ אז } X^* \simeq S_n \text{ (הטלה סטראוגרפית)}$$

$$X = \mathbb{N} \text{ אז } X^* \simeq \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$X = (-\infty, 1) \cup (5, 7) \text{ אז } X^* \simeq 8$$

תרגיל: לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי). נניח ל $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$

משפט: $L\text{Comp} \cap T_2 \subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X \in L\text{Comp} \cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש

$$L\text{Comp} \cap T_2 \subset T_4. \text{ לכן גם } X \in T_{3.5}. \text{ בה"כ } X \notin \text{Comp}.$$

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i: X \rightarrow X^* \in \text{Comp} \cap T_2$. ברור $X^* \in T_4$

(כי $\text{Comp} \cap T_2 \subset T_4$). מצד שני $T_4 \subset T_{3.5}$ (כי $T_4 = T_4^{func}$) לפי משפט Urysohn. לכן

$X^* \in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X \in T_{3.5}$.



תזכורת: $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

תרגיל: הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי מקומית והאוסדורפי.

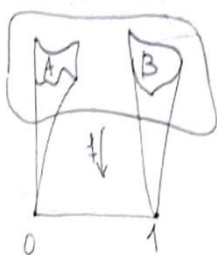
2. קיימת קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

רמז: תת קבוצה פתוחה במרחב האוסדורפי קומפקטי (מקומית) מגדיר תת מרחב האוסדורפי קומפקטי מקומית.

משפט: $Metriz \subset T_4$.

הוכחה: $(X, \tau) \in Metrizable \Rightarrow \exists d: \tau = top(d)$

מ"ל:



א. $X \in T_1$

ב. לכל A, B סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

(א) ברור $Metriz \subset T_2$.

(ב) נגדיר $f: X \rightarrow [0,1]$ ע"י: $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$

כאשר – $f_A(x) = d(x, A), f_B(x) = d(x, B)$

- $0 \leq f(x) \leq 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי – $f_A(x) \geq 0, f_B(x) \geq 0$ לכן המכנה = 0 אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} d(x, A) = 0 \\ d(x, B) = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B$ מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

- נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X, [0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

$$\forall a \in A: f(a) = \frac{0}{0+0} = 0$$

$$\forall b \in B: \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1$$

מצאנו הפרדה פונקציונלית!



מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש
 $A \subset U \subset \bar{U} \subset O$

הסבר: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות
 $U \in N(A) \cap \tau, V \in N(B) \cap \tau$ זרות

אז נקבל $A \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = O$

הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

משפט (למה של Urysohn): $T_4 = T_4^{func}$

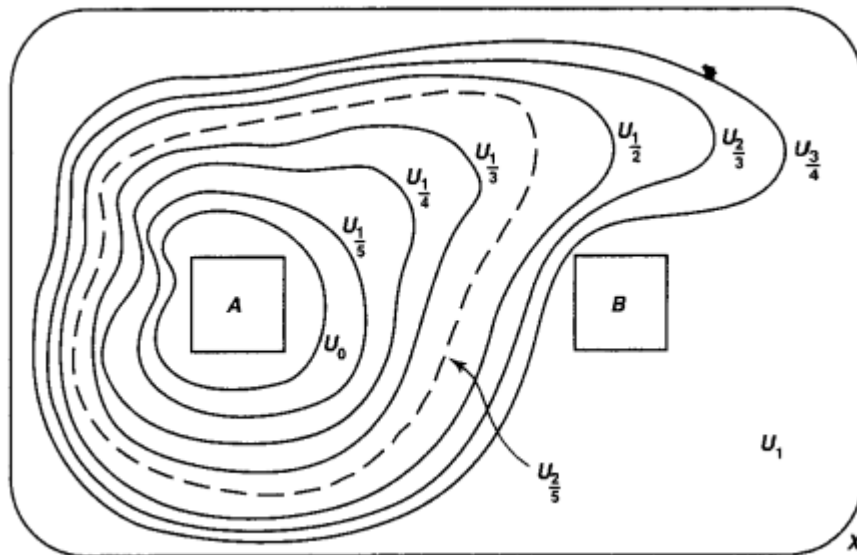
נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן

Urysohn (פונקציה רציפה $f: X \rightarrow [0,1]$ $f(A) = 0, f(B) = 1$)

הוכחה: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : t \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש

$0 < s < t < 1 \Rightarrow \bar{U}_s \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t]$ שימו לב: $([0,s] \subseteq [0,t])$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{1/2}$ כך ש

$$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X \setminus B$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ כך ש

$$A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset X \setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{8}{8} = 1$ כבר הגדרנו!

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t \quad \{U_t : t \in D\}$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $D := \{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}, m \leq 2^n\}$ **צפופה** ב $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $f(x) := \inf\{t \in D : x \in U_t\}$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad f(a) = 0 \quad \forall a \in A \quad f(b) = 1 \quad \forall b \in B \quad \bullet$$

$$f : X \rightarrow [0,1] \quad \text{רציפה} \quad \text{(נדלג על הבדיקה)} \quad \bullet$$

לפי תכונת פרא-בסיס ב $[0,1]$ מ"ל $f^{-1}[0,a), f^{-1}(a,1]$ פתוחות ב X .

א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a) = \{x \in X : f(x) < a\}$.

קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a) = \bigcup_{t < a} U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3) .

ב. ש"ל $f^{-1}(a,1] \setminus X$ סגור.

קודם נעיר $f^{-1}(a,1] = \{x \in X : f(x) \leq a\}$.

עכשיו מ"ל $\{x \in X : f(x) \leq a\} = \bigcap_{a < t} \overline{U_t}$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב (t_3^c))

(\subseteq)

נניח $y \in \{x \in X : f(x) \leq a\}$. נבחר דיאדי $s \in D$ כך ש $a < s < 1$ (צפיפות D !).

אז לכל $a < t < s$ נקבל $\overline{U_t} \subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y) \leq a < t$ מתקיים $y \in U_t \subseteq \overline{U_t}$. לכן $y \in \bigcap_{a < t} \overline{U_t}$.

(\supseteq)

נניח $y \in \bigcap_{a < t} \overline{U_t}$. נבחר ε כך ש $0 < \varepsilon < 1 - a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$$a < t < a + \varepsilon < 1 \quad t \in D$$

$$\text{וגם } t < s < a + \varepsilon \quad s \in D$$

ברור שאז $\overline{U_t} \subseteq U_s$. לכן $y \in U_s$. מכאן $f(y) \leq s < a + \varepsilon$.

קיבלנו $\forall 0 < \varepsilon < 1 - a \quad f(y) < a + \varepsilon$
ז"א $f(y) \leq a$



https://en.wikipedia.org/wiki/Urysohn%27s_lemma :ראו גם

הערה: (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X \in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f: A \rightarrow [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $F: X \rightarrow [0,1]$.

נוכיח רק $(1) \rightarrow (2)$:

נניח C, B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A := C \cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר פונקציה $f: A \rightarrow [0,1]$ $f(A) = 0, f(B) = 1$. אז היא רציפה

(שימו לב: $A := C \cup B$ פירוק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F: X \rightarrow [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B .

תרגיל: * (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה על $F: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$.

הסבר:

קיים הומומורפיזם $h: C \rightarrow C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi: C \rightarrow [0,1]$

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f = (\varphi \times \varphi) \circ h: C \rightarrow [0,1] \times [0,1]$

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$.



הגדרה: נניח $S = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. מפריד נקודות אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיים $f_{i_0} : X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$

ב. מפריד נקודות וקבוצות סגורות אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה C ב X

קיים $f_{i_0} : X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(C)}$.

משפט (על פונקצית האלכסון):

1. נניח $S = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקצית האלכסון

$$f = \Delta_{i \in I} f_i : X \rightarrow Y = \left(\prod_{i \in I} Y_i, \tau_{\Pi} \right) \quad f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

א. אם S מפריד נקודות אז f רציפה חז"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, $X \in T_1$ אז f שיכון טופולוגי.

הוכחה: א. לפי **משפט על האלכסון** רציפה ומתקיים $f_i = p_i \circ f$ $\forall i \in I$.

לכן אם $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1) = (f_i(x_1))_{i \in I} \neq (f_i(x_2))_{i \in I} = f(x_2)$.

ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקצית אלכסון היא חז"ע.

מ"ל שפונקציה (חז"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f : X \rightarrow f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(C) = f(X) \cap \overline{f(C)}$ לכל C סגור ב X .

מ"ל $f(C) \supseteq f(X) \cap \overline{f(C)}$ (הכלה \subseteq ברורה).

נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(C)}$. צ"ל $y \in f(C)$.

נקבל $\exists x \in X \quad y = f(x) \in \overline{f(C)}$.

אז בגלל השוויונים $f_i = p_i \circ f \quad \forall i \in I$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i \in I \quad f_i(x) = p_i(f(x)) \in p_i \overline{f(C)} \subset \overline{p_i f(C)} = \overline{f_i(C)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה C . אז בהכרח $x \in C$.

זה מוכיח $y = f(x) \in f(C)$.



משפט: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in \text{Comp} \cap T_2$).

2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$

$[0,1]^S \in \text{Comp}$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפליית ותורשתית. לכן $X \in \text{Comp} \cap T_2$.

$2 \Leftarrow 1$

נניח $X \in \text{Comp} \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f: X \rightarrow [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $\text{Comp} \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט Urysohn $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a, b \in X$ נבחר פונקציה רציפה $f_{a,b}: X \rightarrow [0,1]$, $f(a) = 0, f(b) = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $S := \{f_s = f_{a,b} \mid a \neq b\}$ (ז"א $s = (a, b), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f: X \rightarrow [0,1]^S$ $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).



משפט (האוניברסליות של קוביות Tychonoff)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3,5}$

2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

הוכחה:

$2 \Leftarrow 1$

$X \in T_{3,5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $S = \{f_i: X \rightarrow [0,1]\}_{i \in I}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $S := C(X, [0,1])$). נגדיר פונקצית האלכסון $f = \Delta_{i \in I} f_i: X \rightarrow [0,1]^S$

שיכון טופולוגי לפי המשפט הקודם.

$$1 \Leftarrow 2$$

לפי משפט על המכפלה (גם Tychonoff) $[0,1]^S \in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית.

לכן $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$. עכשיו נזכיר ש $Comp \cap T_2 \subset T_4 \subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.



תוצאה חשובה: $X \in T_{3.5}$ אם ורק אם ל X יש קומפקטיפיקציה.

משפט (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in Metriz \cap B_2$ (שקול: $X \in Metriz \cap Sep$).

2. X משוכן לתול קובית Hilbert $[0,1]^N$.

הוכחה:

$$2 \Leftarrow 1$$

בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $S = \{f_i : X \rightarrow [0,1]\}_{i \in I}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נתון $X \in Metriz \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

לכל זוג O_m, O_n עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \rightarrow [0,1]$

כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0, f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $Metriz \subseteq T_4 = T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט אלכסון פונקציות מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x \notin C$ ו C סגורה. $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור

סביבה פתוחה O_n כך ש $x \in O_n \subset X \setminus C$.

קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x, \varepsilon) \subset \overline{B(x, \varepsilon)} \subset B[x, \varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז $f_{m,n} : X \rightarrow [0,1]$ מפרידה x, C (כי היא מפרידה $\overline{O_m}, X \setminus O_n$)

$$1 \Leftarrow 2$$

$[0,1]^{\mathbb{N}} \in \text{Metriz} \cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי Metriz, B_2 תכונות תושטיות).



מידע:

א. אפשר להוכיח (משפט Urysohn) $T_3 \cap B_2 \subset \text{Metriz}$

(ראו למשל ספר מצויין: J.R. Munkres, Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

ב. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ משוכן לתון מרחב הילברט l_2 (מצדיק את השם: קובית הילברט) ע"י

$$\varphi : [0,1]^{\mathbb{N}} \rightarrow l_2 \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_1, \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{3}a_3, \dots)$$