טופולוגיה **הרצאה 12** **07.06.2020**

הגדרה: נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X. אומרים ש – **β עידון של α**
אם מתקיים – $\forall B \in \beta\ \exists A \in \alpha : B \subseteq A$

נסמן: $\beta \prec \alpha$.

דוגמה טריוויאלית: $\beta \subseteq \alpha$ אז $\beta \prec \alpha$.

דוגמה: $\{B_{r_1}(x) : x \in X\} \succ \{B_{r_2}(x) : x \in X\}$ $\quad \forall 0 < r_1 < r_2$

הגדרה: נניח (X,d) מ"מ, α כיסוי פתוח של X. אומרים ש α הוא **δ-אחיד**

אם מתקיים $\{B_\delta(x) | x \in X\} \prec \alpha$

אומרים **כיסוי אחיד** (*uniform covering*) אם הוא δ-אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא **מספר לבג** ($Lebesgue$) של כיסוי α אם כל תת קבוצה B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α.

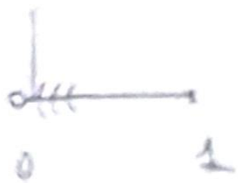
(ז"א $diam\, B < \delta \Rightarrow \{B\} \prec \alpha$).

הערות:

1) אם $0 < \delta$ מספר לבג של α, אז כל δ_1 כך ש - $0 < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג $= \delta$.

3) **דוגמה:** כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.



$X = (0,1] \notin Comp \qquad A_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right]$

$\alpha := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \qquad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$

כיסוי פתוח של $(0,1]$. אבל אין מספר לבג עבור α.

אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל – α,

נגדיר – $A := B_{\frac{2\delta}{5}}(\frac{1}{5}\delta) = (0, \frac{3}{5}\delta)$

אז $diam(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$

אבל A לא מוכל באף איבר של α.

משפט: (מספר *Lebesgue*)

נניח (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

הוכחה: נניח בשלילה שקים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$diam(A_n) < \frac{1}{n}$ אבל A_n **לא מוכל באף איבר של** α.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

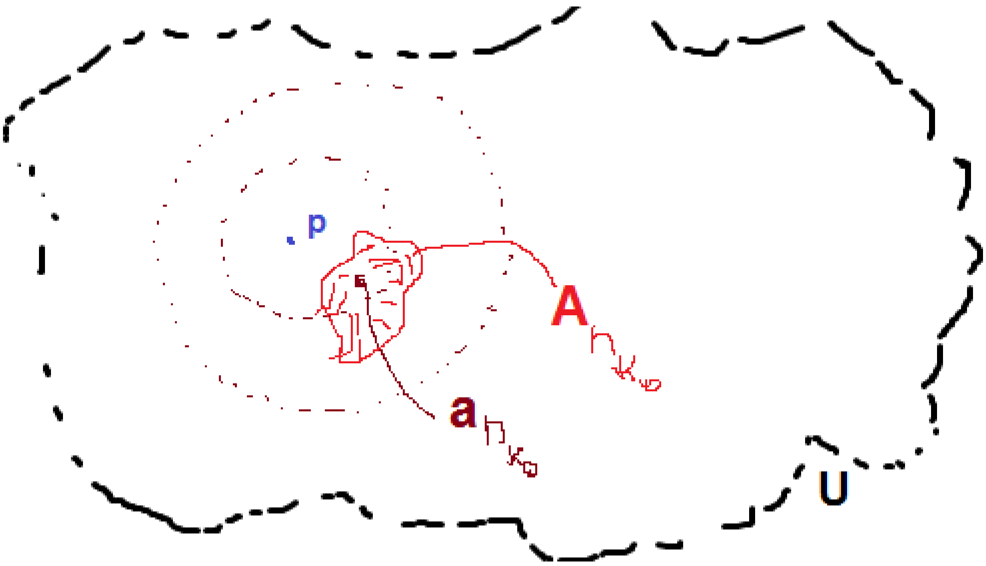
נתון ש X קומפקטי. הוא מטריזבילי לכן גם $X \in \text{SComp}$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = p$.

α כיסוי. קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $diam(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)



$d(p,x) \le d(p, a_{n_{k_0}}) + d(a_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \forall x \in A_{n_{k_0}}$.

נקבל $A_{n_{k_0}} \subseteq B_\varepsilon(p)$. אז גם $A_{n_{k_0}} \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq U \in \alpha$, סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!

☺

תוצאה: אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} \prec \alpha$.

<u>משפט</u>: נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים $f:X\to Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f:X\to Y$ רציפה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>: נניח $\varepsilon>0$. ש"ל שקיים $\delta>0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \rho(f(x_1),f(x_2))\le 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha:=\{f^{-1}(B_\varepsilon(y)):y\in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta>0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1,x_2)<\delta$. אז $diam\{x_1,x_2\}<\delta$. לכן קיים $y\in Y$ כך ש

$$\{x_1,x_2\}\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

אז $\{\mathrm{f}(x_1),\mathrm{f}(x_2)\}\subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y))\subseteq B_\varepsilon(y)$.

לכן $\rho(f(x_1),f(x_2))\le diam(B_\varepsilon(y))\le 2\varepsilon$.

☺

<u>תרגיל:</u> נניח (X,d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $x,y\in X$ כך ש –

$$diam(X)=d(x,y)$$

<u>סקיצה:</u> $X\times X\in Comp$ ו $d:X\times X\to[0,\infty)$ רציפה (מדוע ?) ...

<u>הגדרה</u>: פונקציה $\mathrm{f}:X\to Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y\in Comp\cap T_2$.

<u>דוגמאות</u>:

$\mathrm{i}:(-1,1)\to[-1,1]$ "(דו-נקודתית")

$f:\mathbb{R}^n\to B_1[0]$ $f(v)=\frac{v}{1+\|v\|}$

$\mathrm{f}:\mathbb{N}\to\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ $\mathrm{f(n)}=\frac{1}{n}$ "(חד-נקודתית")

<u>תרגיל</u> * (יהיה בתירגול) -- **קומפקטיפיקציה חד-נקודתית** (Alexandroff)

נניח (X,τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p\notin X$ ("נקודת האינסוף").
בקבוצה $X^*=X\cup\{p\}$ נגדיר $\tau^*:=\tau\cup\{X^*\setminus K:\ K \text{ is compact}\}$.

הוכיחו:

1. $(X^*,\tau^*)\in Comp\cap T_2$.

2. פונקצית ההכלה $i:X\to X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

<u>דוגמאות:</u>

$X=\mathbb{R}^n$ אז $X^*\simeq S_n$ (הטלה סטראוגרפית)

$X=\mathbb{N}$ אז $X^*\simeq\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

$X=(-\infty,1)\cup(5,7)$ אז $X^*\simeq 8$

<u>תרגיל:</u> לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי). נניח ל $(\mathbb{R},\tau_{discr})$

<u>משפט:</u> $LComp\cap T_2\subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X\in LComp\cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש $Comp\cap T_2\subset T_4$. לכן גם $X\in T_{3.5}$. בה"כ $X\notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i:X\to X^*\in Comp\cap T_2$. ברור $X^*\in T_4$

(כי $Comp\cap T_2\subset T_4$). מצד שני $T_4\subset T_{3.5}$ (כי $T_4=T_4^{func}$ לפי משפט Urysohn. לכן $X^*\in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X\in T_{3.5}$.

☺

<u>תזכורת:</u> $T_0,T_1,T_2,T_3,T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי מקומית והאוסדורפי.

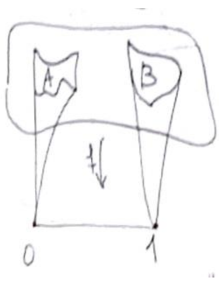
2. קיימת קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

רמז: תת קבוצה פתוחה במרחב האוסדורפי קומפקטי (מקומית) מגדיר תת מרחב האוסדורפי קומפקטי מקומית.

משפט: $Metriz \subset T_4$.

הוכחה: $(X,\tau) \in Metriz \Rightarrow \exists d: \tau = top(d)$

מ"ל:



א. $X \in T_1$.
ב. לכל A, B סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

א) ברור $Metriz \subset T_2$.

ב) נגדיר $f: X \to [0,1]$ ע"י: $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$

כאשר – $f_A(x) = d(x,A)\,, f_B(x) = d(x,B)$

- $0 \le f(x) \le 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי – $f_A(x) \ge 0, f_B(x) \ge 0$
  לכן המכנה $= 0$ אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} d(x,A) = 0 \\ d(x,B) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \overset{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \underbrace{=}_{\text{נתון סגור}} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B$. מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

- נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X,[0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

- $f(a) = \frac{0}{} = 0 \quad :\forall a \in A$.
- $\frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1 \quad :\forall b \in B$.

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) **לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש** $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$.

<u>הסבר</u>: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(A) \cap \tau, \mathrm{V} \in N(B) \cap \tau$

אז נקבל $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus \mathrm{V} \subset X \setminus B = O$.

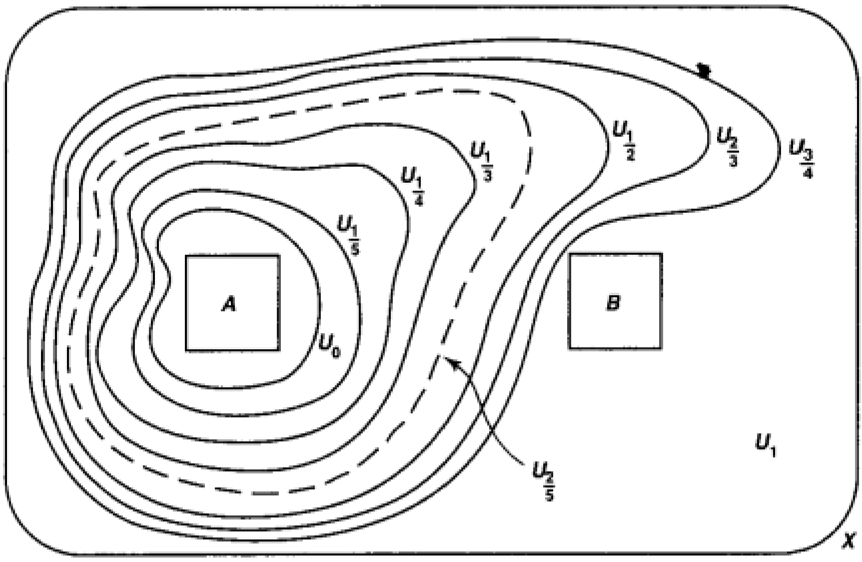
הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

<u>משפט (למה של Urysohn):</u> $T_4 = T_4^{func}$.

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn (פונקציה רציפה $\mathrm{f(A)} = 0, \mathrm{f(B)} = 1$ $\quad f : X \to [0,1]$)

<u>הוכחה</u>: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : \mathrm{t} \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש $0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t)$. שימו לב: $\overline{[0,\mathrm{s})} \subseteq [0,t)$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$. בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{\frac{1}{2}}$

כך ש $A\subset U_{\frac{1}{2}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subset X\setminus B$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{\frac{1}{4}},U_{\frac{3}{4}}$ כך ש

$$A\subset U_{\frac{1}{4}}\subset\overline{U_{\frac{1}{4}}}\subset U_{\frac{1}{2}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subset U_{\frac{3}{4}}\subset\overline{U_{\frac{3}{4}}}\subset X\setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8},\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{8}{8}=1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\frac{8}{8}=1$ כבר הגדרנו !

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$\{U_t:t\in D\}\quad 0<s<t<1\Rightarrow\overline{U_s}\subseteq U_t$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $\mathrm{D}:=\{\frac{m}{2^n},m,n\in\mathbb{N},m\le 2^n\}$ **צפופה** ב $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $f(x):=\inf\{t\in D:x\in U_t\}$

- $0\le f(x)\le 1\quad f(\mathrm{a})=0\ \forall\mathrm{a}\in\mathrm{A}\quad \mathrm{f(b)}=1\ \forall b\in B$

  כי $0\in\overline{D}=[0,1]\quad \forall t\in D\ \ A\subseteq U_t\subseteq X\setminus B\subseteq X=U_1$.

- $f:X\to[0,1]$ רציפה (**נדלג על הבדיקה**)

לפי תכונת פרא-בסיס (ב $[0,1]$) מ"ל $f^{-1}[0,a),\ \ f^{-1}(a,1]$ פתוחות ב X.

א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a)=\{x\in X:f(x)<a\}$.

קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a)=\bigcup_{t<a}U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3).

ב. ש"ל $X\setminus f^{-1}(a,1]$ סגור.

קודם נעיר $X\setminus f^{-1}(a,1]=\{\mathrm{x}\in\mathrm{X}:\mathrm{f(x)}\le\mathrm{a}\}$.

עכשיו מ"ל $\{\mathrm{x}\in\mathrm{X}:\mathrm{f(x)}\le\mathrm{a}\}=\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב $(t_3{}^c)$)

$(\subseteq)$

נניח $\mathrm{y}\in\{\mathrm{x}\in\mathrm{X}:\mathrm{f(x)}\le\mathrm{a}\}$. נבחר דיאדי $s\in D$ כך ש $a<s<1$ (צפיפות D !)

אז לכל $a<t<s$ נקבל $\overline{U_t}\subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y)\le a<t$ מתקיים $y\in U_t\subseteq\overline{U_t}$. לכן $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$.

$(\supseteq)$

נניח $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$. נבחר ε כך ש $0<\varepsilon<1-a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$t\in D$ כך ש $a<t<a+\varepsilon<1$

וגם $s\in D$ כך ש $t<s<a+\varepsilon$.

ברור שאז $\overline{U_t} \subseteq U_s$. לכן $y \in U_s$. מכאן $f(y) \le s < a + \varepsilon$.
קיבלנו $f(y) < a + \varepsilon \quad \forall 0 < \varepsilon < 1 - a$.
ז"א $f(y) \le a$.

☺

ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Urysohn%27s_lemma

<u>הערה:</u> (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X \in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f : A \to [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $F : X \to [0,1]$.

<u>נוכיח</u> רק $(1) \to (2)$:

נניח C, B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A := C \cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר פונקציה $f(A) = 0, f(B) = 1 \quad f : A \to [0,1]$. אז היא רציפה

(שימו לב: $A := C \cup B$ פירוק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F : X \to [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B .

<u>תרגיל:</u> * (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה <u>על</u> $F : [0,1] \to [0,1]^2$.

<u>הסבר:</u>

קיים הומיאומורפיזם $h : C \to C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi : C \to [0,1]$

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f = (\varphi \times \varphi) \circ h : C \to [0,1] \times [0,1]$.

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F : [0,1] \to [0,1]^2$.

☺

<u>הגדרה</u>: נניח $S=\{f_i : X\to Y_i\}_{i\in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. <u>מפריד נקודות</u> אם לכל $x_1\neq x_2$ ב X קיים $f_{i_0}:X\to Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1)\neq f_{i_0}(x_2)$

ב. <u>מפריד נקודות וקבוצות סגורות</u> אם לכל $x\in X$ וקבוצה סגורה $x\notin C$ ב X

קיים $f_{i_0}:X\to Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x)\neq\overline{f_{i_0}(C)}$.

<u>משפט</u> (על פונקציית האלכסון):

1. נניח $S=\{f_i : X\to Y_i\}_{i\in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקציית האלכסון

$f(x)=(f_i(x))_{i\in I}\quad f=\Delta_{i\in I}f_i : X\to Y=(\prod_{i\in I}Y_i,\tau_\Pi)$.

א. אם S מפריד נקודות אז f רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, $X\in T_1$ אז f שיכון טופולוגי.

<u>הוכחה:</u> א. לפי **משפט על האלכסון** f רציפה ומתקיים $f_i=p_i\circ f\quad \forall i\in I$.

לכן אם $f_{i_0}(x_1)\neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1)=(f_i(x_1))_{i\in I}\neq f(x_2)=(f_i(x_2))_{i\in I}$.

ב. $X\in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקצית אלכסון היא חח"ע.

מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f:X\to f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(C)=f(X)\cap\overline{f(C)}$ לכל C סגור ב X.

מ"ל $f(C)\supseteq f(X)\cap\overline{f(C)}$ (הכלה $\subseteq$ ברורה).

נניח $y\in f(X)\cap\overline{f(C)}$. צ"ל $y\in f(C)$.

נקבל $\exists x\in X\quad y=f(x)\in\overline{f(C)}$.

אז בגלל השוויונים $f_i=p_i\circ f\quad \forall i\in I$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i\in I\qquad f_i(x)=p_i(f(x))\in p_i\,\overline{f(C)}\subset\overline{p_i\,f(C)}=\overline{f_i(C)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה C. אז בהכרח $x\in C$.

זה מוכיח $y=f(x)\in f(C)$.

☺

<u>משפט</u>: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).
2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>: $2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפלית ותורשתית. לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$1 \Leftarrow 2$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f: X \to [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a,b \in X$ נבחרב פונקציה רציפה
$f_{a,b}: X \to [0,1], \mathrm{f(a)} = 0, \mathrm{f(b)} = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $\mathrm{S} := \{ f_s = f_{a,b} \mid a \neq b \}$ (ז"א $\mathrm{s} = (a,\mathrm{b}), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$ $f: X \to [0,1]^S$.

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

<u>משפט</u> *(האוניברסליות של קוביות* Tychonoff*)*

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3.5}$
2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>:

$2 \Leftarrow 1$

לכן $X\in T_{3.5}$ קיים אוסף פונקציות $\{f_s:X\to[0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $C(X,[0,1])$). נגדיר פונקצית האלכסון $f=\Delta_{s\in S}f_s:\mathrm{X}\to[0,1]^S$ שיכון טופולוגי לפי המשפט הקודם.

$1\Leftarrow 2$

לפי משפט על המכפלה (גם Tychonoff) $[0,1]^S\in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית.

לכן $[0,1]^S\in Comp\cap T_2$. עכשיו נזכיר ש $Comp\cap T_2\subset T_4\subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.

☺

<u>תוצאה חשובה</u>: $X\in T_{3.5}$ אם ורק אם ל X יש קומפקטיפיקציה.

<u>משפט</u> (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in Metriz\cap B_2$ (שקול: $X\in Metriz\cap Sep$).
2. X משוכן לתול קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

<u>הוכחה</u>:

$2\Leftarrow 1$

בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s:X\to[0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נתון $X\in Metriz\cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

לכל זוג O_n,O_m עם התנאי $\overline{O_m}\subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n}:X\to[0,1]$ כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m})=0,\ f_{m,n}(\mathrm{X}\backslash O_n)=1$ (זה אפשרי כי $Metriz\subseteq T_4=T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט אלכסון פונקציות מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x\notin C$ ו C סגורה. $\gamma=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור סביבה פתוחה O_n כך ש $x\in O_n\subset X\setminus C$.

קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)} \subset B[x,\varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז $f_{m,n} : X \to [0,1]$ מפרידה x,C (כי היא מפרידה $X \setminus O_n \quad \overline{O_m},$)

$1 \Leftarrow 2$

$[0,1]^{\mathbb{N}} \in Metriz \cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי $Metriz, B_2$ תכונות תושתיות).

☺

<u>מידע</u>:

א. אפשר להוכיח (משפט Urysohn) $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$

(ראו למשל ספר מצויין: J.R. Munkres, Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

ב. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ משוכן לתוך מרחב הילברט l_2 (מצדיק את השם: קובית הילברט) ע"י

$$\varphi : [0,1]^{\mathbb{N}} \to l_2 \quad (a_1, a_2, a_3, \cdots) \mapsto (a_1, \tfrac{1}{2}a_2, \tfrac{1}{3}a_3, \cdots)$$