

**אנליזה מודרנית – תרגול 11: מרחבי לבג  $L^p(X, S, \mu)$ .**

תרגיל: האם הפונקציות הבאות הן נורמות במרחב המצורף?

א.  $X = BV([a, b]) \quad \|f\| := T_a^b[f]$

ב.  $X = BV([a, b]) \quad \|f\| := |f(a)| + T_a^b[f]$

פתרון:

א. לא. האקסיומה הראשונה של הנורמה,  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$  נכשלת: לכל פונקציה קבועה יש השתנות טוטאלית אפס, ולא רק לפונקציית האפס. (שאר התכונות מתקיימות, ולמרחב שמקיים את תכונות 2-3 קוראים מרחב סמי-נורמי)

ב. זו כן נורמה.

• ברור שלכל  $f \geq 0$ ,  $\|f\| \geq 0$ , ויש שוויון או"א  $|f(a)| = T_a^b[f] = 0$  (כי זהו סכום של אי-

שליליים).  $T_a^b[f] = 0$  אומר כי הפונקציה  $f \equiv c$  קבועה, ו- $|f(a)| = 0$  אומר

שהערך הקבוע הזה הוא 0.

• לכל  $c \in \mathbb{R}$  קבוע,  $f \in BV([a, b])$

$$\|cf\| = |cf(a)| + T_a^b[cf] = |c||f(a)| + |c|T_a^b[f] = |c|\|f\|$$

לכל  $f, g \in BV([a, b])$

$$\|f + g\| = |(f + g)(a)| + T_a^b[f + g] \leq |f(a)| + |g(a)| + T_a^b[f] + T_a^b[g] = \|f\| + \|g\|$$

תזכורת: יהי  $(X, S, \mu)$  ממ"ח. מרחב לבג ממעלה  $1 \leq p < \infty$  מוגדר ע"י

$$L^p(X, S, \mu) = \left\{ f : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} \quad \text{מגדירים בנוסף} \quad \|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$L^p(X, S, \mu) = \left\{ f : \|f\|_p < \infty \right\} \quad \text{סימונים נוספים הם } L^p(X), L^p(\mu), L^p(d\mu)$$

ישנו גם המרחב  $L^\infty(X)$  המכיל את כל הפונקציות החסומות בעיקר:  $L^\infty(X) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}$

$$\|f\|_\infty = \inf_{f \sim g} \sup_{x \in X} |g(x)| = \text{ess sup}_X (f)$$

תרגיל: תהייה  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  סדרת פונקציות רציפות בהחלט בקטע  $[0, 1]$ , המקיימות  $f_n(0) = 0$ .

נניח כי  $\int_0^1 |f'_m - f'_n| dm \rightarrow 0$  כאשר  $m, n \rightarrow \infty$  (יחדיו). הוכיחו כי הסדרה  $f_n$  מתכנסת במ"ש

בקטע  $[0,1]$  לפונקציה כלשהי  $f$  הרציפה בהחלט בקטע.

פתרון: נתון כי סדרת הנגזרות  $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$  היא קושי במרחב  $L^1([0,1])$ , ומאחר וזה מרחב בנך

(שלם), אנו יודעים שהסדרה  $\{f'_n\}$  מתכנסת לאיזושהי  $g \in L^1$  בנורמה. נגדיר  $f = \int_0^x g dm$ , ומאחר

ו- $L^1$  ( $g$  אינט') הכללת לבג למשפט היסודי אומרת כי  $f$  רציפה בהחלט (כאינט' לא מסוים). נטען כי  $f$  מקיימת את שאר הדרישות. ובכן, כל  $f_n$  רציפה בהחלט ולכן מקיימת את נוסחת ניוטון

$$\text{לייבניץ } f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n dm = \int_0^x f'_n dm : x \in [0,1]$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_0^x f'_n dm - \int_0^x g dm \right| = \left| \int_0^x (f'_n - g) dm \right| \leq \int_0^x |f'_n - g| dm \leq \int_0^1 |f'_n - g| dm = \|f'_n - g\|_1$$

ניקח  $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} \|f'_n - g\|_1 = \|f'_n - g\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ : ניקח  $\sup$  וסיימנו ע"פ קריטריון הסק.

תרגיל\*: נניח כי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות, בעלת "תנאי שפה הומוגניים"  $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{ומקיימת } \int_a^b f^2 dm = 1. \text{ הוכיחו כי מתקיים } \int_a^b x f f' dm = -\frac{1}{2} \text{ וגם } \left[ \int_a^b (f')^2 dm \right] \left[ \int_a^b x^2 f^2 dm \right] \geq \frac{1}{4}$$

פתרון: הכל רציף ולכן נעבוד עם אינטגרל רימן. נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$1 = \int_a^b f^2(x) dx = x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b 2x f(x) f'(x) dx \Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

ניקח ערך מוחלט לקבל

$$\frac{1}{2} = \left| \int_a^b x f(x) f'(x) dx \right| \leq \int_a^b |x f(x) f'(x)| dx = \|x f f'\|_1 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \|x f'\|_2 = \left[ \int_a^b (f'(x))^2 dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b x^2 f(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\cdot \frac{1}{4} \leq \left[ \int_a^b (f'(x))^2 dx \right] \left[ \int_a^b x^2 f(x)^2 dx \right] \text{ נעלה בריבוע לקבל}$$

תרגיל: יהי  $(X, S, \mu)$  מ"ח ממידה סופית (כלומר  $\mu(X) < \infty$ ) ויהיו  $1 \leq r < p < \infty$ . הוכיחו כי

$$L^p(X, S, \mu) \subseteq L^r(X, S, \mu)$$

פתרון: תהי  $f \in L^p$  המספרים  $t = \frac{p}{r}, s = \frac{p}{p-r}$  הם מעריכים צמודים (סכום ההופכיים 1), וע"פ

א"ש הולדר

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \cdot 1 d\mu = \| |f|^r \cdot 1 \|_1 \leq \left( \int_X (|f|^r)^t d\mu \right)^{1/t} \left( \int_X 1^s d\mu \right)^{1/s} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/t} \mu(X)^{1/s} < \infty$$

ומכאן  $\|f\|_r < \infty$  ולכן  $f \in L^r$ .

דוגמה: הממ"ח  $([0,1], L, m)$  סופי. ידוע כי  $x^{-1/4} \in L^1([0,1])$  ( $\int_0^1 x^{-1/2} dm(x) = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 < \infty$ )

ולכן מתקיים  $x^{-1/4} \in L^1$  או  $\int_0^1 x^{-1/4} dm(x) < \infty$ .

הערה: אם הממ"ח אינו סופי, אין הכלה בשום כיוון. (ש"ב).

תרגיל: נתבונן בממ"ח  $([0,1], L, m)$ , ונגדיר סדרת פונקציות ע"י  $g_n(x) = n \cdot I_{[0, n^{-3}]}(x)$ .

א. הוכיחו כי לכל  $f \in L^2([0,1])$  מתקיים  $\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

ב. הראו שיש  $f \in L^1([0,1])$  עבורה  $\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

פתרון: א.

$$d\left(\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x), 0\right) = \left| \int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) - 0 \right| \leq \int_0^1 |f(x) g_n(x)| dm(x) \leq \|f\|_2 \|g_n\|_2$$

$$\|g_n\|_2 = \left( \int_0^1 |n \cdot I_{[0, n^{-3}]}|^2 dm \right)^{1/2} = \left( \int_0^1 n^2 I_{[0, n^{-3}]} dm \right)^{1/2} = \left( n^2 m([0, n^{-3}]) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

וניתן לחשב

כלומר  $\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) - 0 \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  כנדרש (ע"פ תרגיל קודם ניתן להחליף את  $L^2$  בכל מרחב  $L^{p>2}$ ).

ב. ניקח  $f = x^{-2/3} \in L^1([0,1])$  (f אינטגרבילית לבג כי היא אינט' רימן בהחלט). נחשב

$$\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) = \int_0^{n^{-3}} x^{-2/3} n dm(x) = 3x^{1/3} n \Big|_{x=0}^{x=n^{-3}} = 3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \neq 0$$

תרגיל: יהיו  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  שני מרחבי בנך. ניתן למכפלה הקרטזית  $X \times Y$  מבנה לינארי

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \text{ו-} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y)$$

הוכיחו כי  $(X \times Y, \|\cdot\|)$  מרחב בנך.

פתרון: תהי  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  סדרת קושי ב- $X \times Y$ , ויש להוכיח שיש לה גבול שם. ביתר פירוט, לכל

$$\varepsilon > 0 \text{ קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך שאם } m, n \geq N \text{ אזי } \|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\| < \varepsilon$$

כך שאם  $N \in \mathbb{N}$  קיים  $\varepsilon > 0$  מכאן שלכל  $\varepsilon > 0$   $\|(x_m - x_n, y_m - y_n)\| = \|x_m - x_n\|_X + \|y_m - y_n\|_Y < \varepsilon$

הן  $\{x_n\} \subseteq X, \{y_n\} \subseteq Y$  קיבלנו שהסדרות  $\|x_m - x_n\|_X < \varepsilon$  וגם  $\|y_m - y_n\|_Y < \varepsilon$  אזי  $m, n \geq N$

סדרות קושי, ומאחר ואילו מרחבי בנך הסדרות מתכנסות:  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ . נטען כי הגבול של

סדרתנו הוא  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ . הוכחה:

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| \leq \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0 \text{ משי"ל.}$$