תרגיל מס' 11

כל שאלה שווה 17 נקודות. כלומר, אם פותרים את כל השאלות ניתן לצבור עד 119 נקודות.

<u>שאלה 1</u> מצאו את כל צורות ג'ורדן האפשריות עבור המטריצות A שהפולינום האופייני f_A שלהן והפולינום המינימאלי m_A שלהן הם:

א. $m_A(x)=(x-2)^2(x-3)^2 \quad f_A(x)=(x-2)^2(x-3)^2$

ב. $m_A(x)=(x-7)^2 \quad f_A(x)=(x-7)^5$

ג. $m_A(x)=(x-2)^3 \quad f_A(x)=(x-2)^7$

ד. $m_A(x)=(x-3)^2(x-5)^2 \quad f_A(x)=(x-3)^4(x-5)^4$

<u>שאלה 2</u> תהי $A\in\mathbb{C}^{3x3}$. הראו כי צורת ג'ורדן של A נקבעת באופן יחיד ע"י הפולינום האופייני והפולינום המינימאלי של A.
(הדרכה: בדקו את כל האפשרויות עבור הפולינום האופייני של A. יש סה"כ 3 אפשרויות: $f_A(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$, $f_A(x)=(x-\lambda)^3$, $f_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$.
עבור כל אחת מהאפשרויות האלו מצאו את הפולינומים המינימאליים האפשריים ומכך הסיקו את צורת ז'ורדן).

<u>שאלה 3</u> תנו דוגמא לכך שצורת ז'ורדן של מטריצה $A\in\mathbb{C}^{4x4}$ לא בהכרח נקבעת באופן יחיד ע"י הפולינום האופייני והפולינום המינימאלי של A.

<u>שאלה 4</u> תהי $J=J_{14}(\lambda)$ מטריצת ג'ורדן 14×14 המתאימה לע"ע λ. נתון כי:

$$rank(J-\lambda I)=7,\quad rank(J-\lambda I)^2=2,\quad rank(J-\lambda I)^3=0$$

מצאו כמה בלוקי ז'ורדן מכל סדר יש ב- J.

<u>שאלה 5</u> תהי $A=\begin{pmatrix}15&-35&10\\3&-7&2\\-12&28&-8\end{pmatrix}$. מצאו את צורת ז'ורדן שלה J, ומצאו מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=J$.

<u>שאלה 6</u> תהי $A=\begin{pmatrix}3&9&9&18&6\\-12&27&12&36&0\\6&-9&3&-18&0\\2&-3&-1&3&2\\-3&3&0&9&9\end{pmatrix}$. מצאו את צורת ז'ורדן שלה J, ומצאו מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=J$.
רמז: ניתן לבדוק כי הפולינום האופייני של A הוא $(x-9)^5$.

<u>שאלה 7</u>
תהי $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&-5&4\\6&-14&10\end{pmatrix}$. מצאו את צורת ז'ורדן שלה J, ומצאו מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=J$.