אביב תשע"ו

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: משוואות אויילר לגראנג'

1. שטח פנים מינימלי. נניח שיוצרים משטח על ידי סבוב של עקום המחבר שתי נקודות במישור xy סביב ציר y. מצאו את העקום עבורו שטח הפנים של המשטח מינימלי.

2. **The Brachistochrone problem** בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה (x_1, y_1) לנקודה (x_2, y_2) לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה $x(\phi) = -a(\phi - \sin\phi), y(\phi) = a(1 - \cos\phi),\ a < 0$).

   (א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

   (ב) הניחו פרמטריציה $\phi(t) = \{0 \le t \le t_{1,2}^{cyc};\ \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$ וחשבו את $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$

   (ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

3. הראו כי $t_{1,2}^{cyc}$ כאשר נוסעים מנקודה (x_1, y_1) למינימום של הציקלואידה $(-\pi a, 2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה (x_1, y_1)
(רמז: קבלו את האינטגרל $\int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}}\,d\phi$, כאשר ϕ_0 הזוית בנקודת ההתחלה, והראו כי הוא שווה ל π).

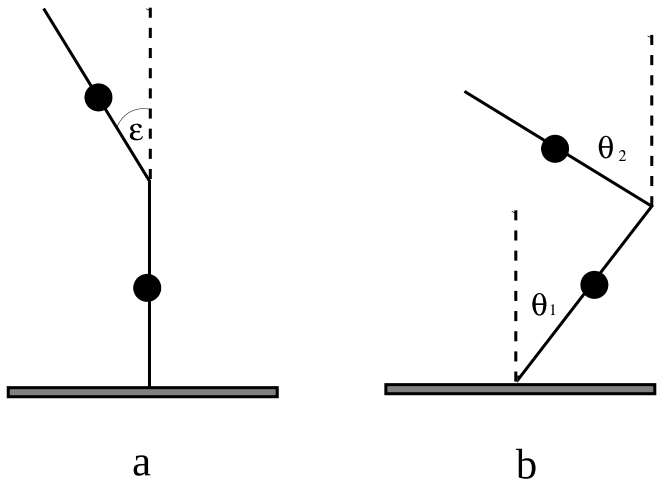
4. שתי מסות m_1 ו m_2 עם קורדינטות x_1 ו x_2 בהתאמה, מתנגשות אלסטית.

   (א) רשמו את הלגראנג'יאן והראו כי התנע הקווי נשמר.

   (ב) מצאו קורדינטות אחרות ולגראנג'יאן חדש, כך שהתנע הקווי הינו תנע צמוד לקורדינטה ציקלית.

5. שני מוטות חסרי מסה באורך r כל אחד מחוברים בקצותיהם. מסה m מקובעת באמצע כל אחד מן המוטות. המוט התחתון מוחזק אנכית, וקצהו מחובר לקרקע. המוט העליון מוסט בזוית ϵ ביחס למוט האנכי (איור a). מצאו את התאוצות הזויתיות ברגע בו משחררים את המוטות ממנוחה. (הניחו כי $\epsilon << 1$, רשמו את

מיקומי המסות כמתואר באיור b והשתמשו בקרוב זויות קטנות).



6. מסה נקודתית m חפשית לנוע על פני כדור בעל רדיוס R (ללא חיכוך). רשמו את הלגראנג׳יאן בקורדינטות כדוריות (r, θ, φ). הוסיפו שני אילוצים, עבור r ועבור φ (הניחו כי התנע הזויתי שווה לאפס) וקבלו את הכח המוכלל מתוך משוואות התנועה. מהו כח זה ?