הערה: משמעות התלפת סדר סכימה ורציפות: אם $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ ו- f_n רציפות ב- x_0 אז f רציפה ב- x_0 (ונקבל)

① $$\lim_{x\to x_0}\overbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}^{f(x)} = f(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

האינטגרל ה"אם"

ועבור טורים:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

(של פשוט!)

תרגיל ⊛

תהי $(P_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סידרת פולינומים שמתכנסת במידה שווה בכל $\mathbb{R}$ לפונקציה $P(x)$.

יש להוכיח כי $P(x)$ פולינום!

(הערה: לא אמרנו דבר על הדרגה של פולינום $P_n(x)$...).

הוכחה:

ראשית, נשים לב כי אם $Q(x)$ פולינום שחסום ב- $\mathbb{R}$ (כלומר $|Q(x)|\leq M$ לכל $x\in\mathbb{R}$, עבור מספר M), אז $Q(x)\equiv C$ כלומר פונקציה קבועה/פולינום ממעלה 0:

סיבה לכך: אם $Q(x)=ax^n+\underbrace{\qquad}_{\text{חזקות נמוכות יותר}}$, $a\neq 0$, אז

$Q(x)=ax^n\Big[1+\underbrace{\qquad}_{\text{סכום חזקות שליליות}}\Big]$, ומכאן $\lim_{|x|\to\infty}|Q(x)|=\infty$ בסתירה לחסימות,

שהיא פונקציה חסומה עבור $|x|>1$ למשל

לכן $a=0$ ו- $\underset{\text{קבוע!}}{Q(x)\equiv C}$

כעת, סידרת פולינומים מתכנסת במ"ש לכן היא סידרת קושי במידה שווה, כלומר עבור $\varepsilon>0$ כלשהו קיים N כך ש- $n,m\geq N$ גורר $|P_n(x)-P_m(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

כעת, $P_n(x)-P_m(x)$ היא פולינום, חסום ב- $\mathbb{R}$, לכן לפי מה שראינו הוא קבוע, כלומר עבור $N\leq n,m$, כל שני פולינומים נבדלים רק בקבוע, $P_n(x)=P_N(x)+C_n \xLeftarrow{\text{ניקח } m=N}$ אך נתון שהסדרה $P_n(x)$ מתכנסת, לכן

$P(x)=\underset{\text{פולינום}}{P_N(x)+C}$ לכל $x\in\mathbb{R}$ $\Longleftarrow$ $\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}P_n(x)-P_N(x) = P(x)-P_N(x)=C$

הוכחנו $\square$

מבחני התכנסות במ"ש נוספים לטורים:

(*) **Dirichlet**: יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ כך ש:

- הסדרה $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ חסומה במידה אחידה על קטע I (כלומר $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le M$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in I$).
- הסדרה $(b_n(x))_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית (כלומר לכל x קבוע, $(b_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית), ומתכנסת לאפס במידה שווה ב- I.

אז: הטור $\sum_{n\ge 1} a_n(x) b_n(x)$ מתכנס במ"ש!

(*) **Abel**: יהי טור $\sum_{n\ge 1} a_n(x) b_n(x)$ כך ש-

- הסדרה $(b_n(x))_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית לכל x קבוע, וחסומה במידה אחידה על קטע I ($|b_n(x)| \le M$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in I$).
- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I.

אז: $\sum_{n\ge 1} a_n(x) b_n(x)$ מתכנס במ"ש!

(*) **דוגמא**: בדוק התכנסות במ"ש של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ על $[0,\infty)$.

פתרון:

- לכל $x\in[0,\infty)$ הסדרה $b_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ מונוטונית יורדת לאפס ומקיים

$|b_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ לכן התכנסות $b_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ לכל x

ונימוק דומה יראה שההתכנסות גם במידה שווה!: $b_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} 0$!

3

המשך:

(סוף) על $a_n(x) := \sin x \cdot \sin(nx)$. אז קיים פיתוח (לא כרגיל!)

הבא:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin x \, \sin(kx) \underset{\text{טריק!}}{=} 2\cos\frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2} \cdot \sin(kx)$$

$$\underset{\text{שימוש בנוסחה}}{=} 2\cos\frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x\right) \underset{\text{עברנו לסכום טלסקופי}}{=} \cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right]$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$|S_n(x)| \le 2$ לכל n ו- $x \in [0,\infty)$

אי שוויון המשולש!

ולכן מתקיימים תנאי דיריכלה!

- **משפט Dini.** (לזכרים:)

אם $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של רציפות אי שליליות (או אי חיוביות) על קטע סגור $[a,b]$ ופונקציית הסכום (גבול נקודתי) $S(x)$ רציפה בקטע אז: ההתכנסות אליה היא במ"ש!

ובעצם מסקנה: טור של פונקציות רציפות ואי שליליות (או אי חיוביות) מתכנס לפונקציה רציפה $\iff$ ההתכנסות היא במ"ש!

קיים גם Dini לסדרות של פונקציות:

אם $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סידרת פונקציות רציפות שמוגדרות על קטע סגור $[a,b]$ שמתכנסות ל- $f(x)$ (נקודתית!), כש- f רציפה וגם לכל $x \in [a,b]$ סידרת המספרים $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית, אז $f_n(x)$ מתכנסת ל- f במ"ש בקטע!

(שימו לב ייתכן שעבור $x\neq y$ $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ עולה! ו- $(f_n(y))_{n=1}^{\infty}$ יורדת!)

תרגיל:

$g(x)$ רציפה ב- $[0,1]$ ו- $g(1)=0$.

יש להוכיח כי $(x^n\cdot g(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת במ"ש ב- $[0,1]$.

הוכחה:

ראשית נראה התכנסות נקודתית:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow x^n g(x)=1^n\cdot g(1)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ 0\le x<1 \Rightarrow |x^n g(x)|\le \underbrace{\max_{[0,1]}|g(x)|}_{=M}\cdot x^n = M\cdot x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

לכן: $x^n g(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ב- $[0,1]$.

נראה התכנסות במ"ש:

דרך I: קיים $|x^{n+1}g(x)|\le|x^n g(x)|$ לכל $x\in[0,1]$, לכן הסדרה $(|x^n g(x)|)$ מונוטונית עבור כל $x\in[0,1]$, $|x^n g(x)|$ רציפה (הרכבת ערך מוחלט על הרציפה $x^n g(x)$) וגם הגבול 0 רציף $\xRightarrow{Dini}$ התכנסות במ"ש!

דרך II: "הגדרה": יהי $\varepsilon>0$. $g(x)$ רציפה ב- $[0,1]$ לכן קיים $\delta>0$ כך ש- $x\in[1-\delta,1]$ גורר $|g(x)|<\varepsilon$ (כי $g(1)=0$!)

בקטע $[0,1-\delta]$ קיים: $|x^n g(x)|\le(\max_{[0,1-\delta]}|g|)(1-\delta)^n<\varepsilon$

עבור n_0 מספיק גדול!

ובקטע $[1-\delta,1]$: $|x^n g(x)|\le\underbrace{|x^n|}_{\le 1}\cdot\varepsilon<\varepsilon$

לכן מצאנו n_0 מתאים להתכנסות במ"ש!

אינטגרציה/גזירה איבר איבר

מתי ניתן להחליף סדר של אינטגרציה וגבול עבור סדרת פונקציות $f_n(x)$?

משפט

אם $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פ' רציפות בקטע $[a,b]$ שמתכנסת במ"ש ל-f אז f אינטגרבילית וקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx$$

מסקנה עבור טור פונקציות $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש אז $\int_a^b \left(\sum_1^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$

הערה מספיק לדרוש (f_n) אינטגרביליות ואז f אינטגרבילי ותוצאה מתקיימת.

משפט נוסף: גזירה איבר איבר

אם $f_n(x)$ סדרת פונקציות גזירות ב-$[a,b]$ ברציפות!
והטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית בקטע, וטור נגזרות $\sum_1 f_n'(x)$ מתכנס במ"ש בקטע אז $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ וגם הטור עצמו $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש!

ועכשיו לסדרות:

נדרוש סדרה $(f_n(x))$ מתכנסת! סדרת נגזרות רציפות $f_n'(x)$ מתכנסת במ"ש אז סדרה (f_n) מתכנסת במ"ש וכך מותר גזירה

$$(\lim f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

6

נבדוק תחום התכנסות, רציפות ותחום גזירות

של: $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}$

- עבור $x=0$, התכנסות.
- עבור $x\neq 0$ נשווה את הטור עם טור מוחלט ל- $\sum_{1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2}$:

(מספיק לבדוק עבור $|x|$, $\arctan x$ אי-זוגית!)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\arctan\frac{|x|}{n^2}\right]}{\frac{|x|}{n^2}} =$$

ונזכיר שגבול כזה ניתן לחשב באופן כללי:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = 1 \qquad (*)$$

לכן מתכנסים/מתבדרים יחדיו $\Leftarrow$ מתכנסת $\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{n^2}$ נסיק התכנסות הטור שלנו, לכל $x\in\mathbb{R}$!

- עבור התכנסות במ"ש: ניתן לפי $(*)$ למעלה לומר ש- $\left|\frac{\arctan x}{x}\right| \leq 2$ לאפס ל- $|x|$ קטן מספיק $\Leftarrow$ $|\arctan x| \leq 2|x|$

ולכן $\left|\arctan\frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ ל- n גדול מספיק, ומכאן

M-test של ויירשטראס, עבור כל קטע סופי סגור $[-X,X]$!

ולכן נקבל התכנסות במ"ש בכל קטע סופי סגור $[-X,X]$

ומכיוון ש- $\arctan\frac{x}{n^2}$ רציפה, נסיק שגם הגבול רציפה

(כי לכל $x\in\mathbb{R}$ נמצא קטע $[-X_0,X_0]$ שמכיל אותו).

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}\arctan\frac{x}{n^2}$ רציפה!

גזירות: $\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)' \underset{\text{גזירה}}{=} \frac{1}{\left[n^2+\frac{x^2}{n^2}\right]} \leq \frac{1}{n^2}$ ולפי ויירשטראס טור הנגזרות

מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$! $\Leftarrow$ ניתן לגזור איבר איבר ולקבל

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[n^2+\frac{x^2}{n^2}\right]}$$

(*) תרגיל

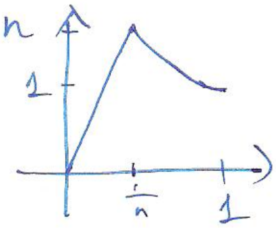
נניח f_n רציפות ב- $[a,b]$ ו- $f_n \to f$ נקודתית.

א. האם בהכרח f אינטגרבילית ב- $[a,b]$?

ב. נניח f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, האם ניתן להחליף סדר גבול ואינטגרציה? כלומר, האם: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$?

פתרון:

א. **לא!** נסתכל על $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & ; [0,\frac{1}{n}] \\ \frac{1}{x} & ; [\frac{1}{n},1] \end{cases}$ על הקטע $[0,1]$



- f_n רציפה לכל n.

נמצא את פונקציית הגבול:

(*) $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(*) $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x}$ לכל $0<x\le 1$.

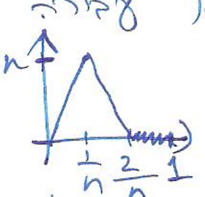
כי עבור x רצוי, קיים N טבעי כך ש- $\frac{1}{N}<x$ ולכל $N<n$ נקבל

$x>\frac{1}{N}>\frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=\begin{cases} 0 & ; 0 \\ \frac{1}{x} & ; (0,1] \end{cases} \Rightarrow f(x)$ לא אינטגרבילית כי לא חסומה ב- $[0,1]$.

__מסקנה__: f_n לא מתכנסת במ"ש (כי זה היה גורר אינטגרביליות של f ואפילו רציפות שלה!).

ב. נסתכל על דוגמא עבורה f אינטגרבילית אך __לא__ ניתן להחליף סדר פעולות: נגדיר f_n:



אז $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ על $[0,1]$, ו- 0 אינטגרבילית,

אבל: $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{\text{משולש}}{=} (n\cdot\frac{2}{n})\cdot\frac{1}{2} = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \lim f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$

דוגמא:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$$

מהו תחום ההגדרה של f (כלומר תחום ההתכנסות) ומהו תחום הרציפות?

פתרון:

- ל- $x=0$ $\Leftarrow$ $f(0)=0$.
- ל $x\neq 0$ $\Leftarrow$ הטור הוא בעצם טור הנדסי. עם מנה $\frac{1}{1+x^2}$ שקטנה מ-1 בערכה המוחלט, לכן טור מתכנס:

$$f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=x\,\frac{1}{\left[1-\frac{1}{1+x^2}\right]}=x\cdot\frac{1+x^2}{x^2}=\frac{1+x^2}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}0 ; & x=0\\ \frac{1+x^2}{x} ; & x\neq 0\end{cases}$$

. ו- f רציפה לכל $x\neq 0$.

(*) האם הטור מתכנס במידה שווה ב- $[0,\infty)$? **לא**!
אם היה מתכנס במ"ש אז מכיון שזהו טור פונקציות רציפות, פ' הגבול הייתה צריכה להיות רציפה, בסתירה!

(*) האם הטור מתכנס במ"ש ב- $(0,\infty)$? אם כן, אז לפי תרגיל 10 שאלה 7, יש להוכיח שם כי מכיון שיש התכנסות נקודתית ב- 0 היינו מקבלים התכנסות במ"ש ב- $[0,\infty)$, שזה לא ייתכן! ↑

טורי חזקות:

טור סביב אפס $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ והכללה: טור סביב x_0:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. ועל ידי הצבה $t=(x-x_0)$ נחזור לטור סביב אפס!

(*) לכל טור חזקות יש מספר $\rho \geq 0$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x|<\rho$, מתבדר לכל $|x|>\rho$ ועבור $x=\pm\rho$ יש לבדוק בנפרד!

ρ נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור!

נוסחא למציאת ρ: $\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}}$ כך ש- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=0$ אז $\rho=\infty$
- אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=\infty$ אז $\rho=0$.

בנוסף אם קיים גבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ אז הוא שווה ל- ρ. (מבחן דלמבר)

דוגמא:

מהו תחום ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 2^n}$?

פתרון:

לפי דלמבר:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n^2 2^n}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot 2 \Longrightarrow 2$$

לכן $\rho=2$. עבור קצוות נבדוק בנפרד:

$x=2$: $\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum\frac{1}{n^2}<\infty$ ✓

$x=-2$: $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \sum\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$ מתכנס! בגלל מתכנס בהחלט!

(ט)

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$$

פיתרון:

קודם ניתן לרשום:

$$\begin{cases} a_{2n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ a_{2n+1}=0 \end{cases}$$

נשתמש ב-"קושי הדמר":

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ולכן רדיוס התכנסות $\rho=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

התכנסות ל- $|x|<\frac{1}{\sqrt{e}}$ התבדרות $|x|>\frac{1}{\sqrt{e}}$ ועבור קצוות

נבדוק בנפרד: $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ נקבל טור מספרים עם איבר כללי:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$$

נסתכל על ln של הביטוי הזה

$$\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right]=n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n=n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

ונרצה למצוא גבול כש- $n\to\infty$. נחשב משהו כללי יותר:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{L}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{1+x}-1\right)}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{(1+x)2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{(1+x)\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=e^{\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right]}\longrightarrow e^{-\frac{1}{2}}\neq0$$

איבר כללי לא שואף לאפס ולכן התבדרות!

ובדומה ל- $-\frac{1}{\sqrt{e}}$

תכונות טורי חזקות:

- אם ρ רדיוס ההתכנסות, אז לכל $0<r<\rho$ הטור שלנו מתכנס במידה שווה בקטע $[-r,r]$ (נובע ממבחן ויירשטראס)

- אם הטור שלנו מתכנס ב- $x=R$? אז יש התכנסות במידה שווה בתחום $[0,R]$ (ואם התכנסות ב- $x=-R$? אז התכנסות במ"ש ב- $[-R,0]$)

הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[\alpha,\beta]$ שמוכל בתחום ההתכנסות!

- אם הטור שלנו מתבדר ב- $x=\rho$, כש- ρ רדיוס ההתכנסות, אז אין התכנסות במ"ש בקטע $(-\rho,\rho)$.

תכונות נוספות: אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור עם רדיוס התכנסות ρ, אז הסכום שלו $S(x)$ הינו פונקציה רציפה ב- $(-R,R)$.

ובנוסף: אם הטור מתכנס גם בנקודה $x=\rho$ אז הסכום רציף משמאל ב- ρ. כלומר
$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$
בנקודת התכנסות x_0 של הטור.

לטור הנגזרות עם רדיוס התכנסות ρ: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a x^{n-1}$ יש אותו רדיוס התכנסות כמו לטור המקורי! וניתן לגזור איבר איבר.

וגם אם טור הנגזרות מתכנס ב- $x=\rho$ $(x=-\rho)$ אז גם הטור המקורי מתכנס ב- ρ $(-\rho)$.

פיתוח פונקציות לטור חזקות:

אם ל- f יש פיתוח לטור $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ אז f גזירה ב- $(-\rho,\rho)$ מסדר כלשהו וקיים $f^{(k)}(0)=a_k\cdot k!$ $\Leftarrow$ $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. כלומר - מקדמים יחידים! (משפט היחידות)

משפט נוסף: אם f גזירה מכל סדר ב- $[-r,r]$ ו- $|f^{(k)}(x)|\le M$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[-r,r]$ אז $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ (טור מקלורין).

נחשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ בתחום התכנסותו.

כלומר $\begin{cases} a_{2n}=0 \\ a_{2n-1}=\frac{1}{2n-1} \end{cases}$. נמצא רדיוס התכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{\left(\frac{1}{2n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)}=1$$

כי קיבלנו תת-סדרה של ...

$\Downarrow$

$\rho=1$ רדיוס התכנסות.

נבדוק עבור $x=\pm1$ ונקודות הקצה ל- $x=\pm1$!

(ממשפט קודם ניתן להסיק שההתכנסות ב- $(-1,1)$ אינה במידה שווה)

$\Downarrow$

אנו רוצים לחשב: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. ננסה לגזור טור איבר איבר ולהגיע בדרך ידועה:

$S(x)$ שלנו גזיר איבר איבר ב- $|x|<1$ לפי משפט

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'\underset{\text{גזירה איבר איבר}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$$

טור הנדסי

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2}$$

כלומר, קיבלנו: $S'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ ועכשיו נסיק את $S(x)$:

$$S(x)=S(x)-\underbrace{S(0)}_{=0}=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right]dt=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^x$$

(S היא קדומה של S' והיחידה שבה $S(0)=0$!)

$$\boxed{S(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

כלומר $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}$

<u>תרגיל</u> חשבו סכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$:

<u>פיתרון:</u> נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^2$ ונרצה להציב $x=\frac{1}{2}$.

האם אפשר? - נבדוק רדיוס התכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1 \Longrightarrow \rho=1$$

עבור הקצוות: לא מתכנס. לכן תחום ההתכנסות $|x|<1$.

נסמן: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$. זו פונקציה רציפה, לפי משפט,

ב- $(-1,1)$ ואינטגרבילית ויש לה התכנסות במ"ש

של הטור ל- S, בכל <u>קטע סגור</u> בתחום ההתכנסות ולכן

ניתן לגזור אינטגרציה איבר איבר:

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

נסמן $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ ואז:

$$\int_0^x G(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

אם נגדיר $H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ $\Leftarrow$ עם אותו רדיוס התכנסות כמו ל- S ושוב

נקבל:

$$\int_0^x H(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

נמצא את H $\Longleftarrow$ נמצא את S :

$$H(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$G(x)=(x\cdot H(x))'=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{(1-x)^2-x\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}$$

$$=\frac{(1-x)[(1-x)+2x]}{(1-x)^4}=\frac{1-x^2}{(1-x)^4}$$

<u>ומכאן:</u> $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\boxed{S(x)=x\cdot G(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}}$ בקטע סגור

*

פיתוח של פונקציות לטור:

יודעים כי $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ב- $|x|<1$.

מכאן למשל: אם נציב $x=-t^2$ נקבל:

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

וטור מתכנס ב- $|t|<1$.

מותר לעשות אינטגרציה איבר איבר ולקבל:

$$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$; $|x|<1$

כעת, יש לנו התכנסות של הטור שקיבלנו ב- $x=1$ (לייבניץ!)

ומשפט אבל יש גבול

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\lim_{x\to1^-}(\arctan x)=\frac{\pi}{4}$$

וקיבלנו סכום טור!

---

* **תרגיל:** נחשב קירוב את $\int_0^1 e^{-t^2}dt$.

נפתח את $g(t)=e^{-t^2}$ לטור חזקות: יודעים כי לכל y ד״ר

$$e^y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$$

ובפרט עבור $y=-t^2$:

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$, עם רדיוס התכנסות: ∞!

ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^1 e^{-t^2}dt=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n+1}$$

האם ניתן להעריך את השגיאה? נסמן $S_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{2k+1}$ והוא לפי טור לייבניץ נקבל עבור הסכום S:

$$|S-S_n|\le\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(2n+3)}$$

ואם נרצה דיוק של למשל $\frac{1}{100}$ נבחר $n=3$!

דרכים נוספות לפיתוח פונקציות לטור:

- לפי משפט על חסימות במשותף של כל הנגזרות של פונקציה f, בקטע $[-r,r]$: $|f^{(k)}(x)| \le M$

- אפשר פשוט לגזור ולמצוא נוסחה כללית ל- $f^{(n)}(0)$ ואז לקבל טור מקלורין

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(או מסביב לנקודה x_0 אחרת עבורה התנאי מתקיים!)

למשל:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n .$$

- אפשר גם: להגיע לצורה של טור הנדסי אינסופי:

$$\frac{1}{2+3x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}x\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}x\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n$$

עבור $\left|\frac{3}{2}x\right|<1$! כלו' $|x|<\frac{2}{3}$.

אפשר לפעמים גם להתחכם שוב: למצוא פיתוח של:

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

פיתרון:

נגזור f:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

נפתח f' לטור: (כטור הנדסי אינסופי)

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \text{ל-} \quad |x|<1 .$$

ניתן לעשות אינטגרציה איבר איבר ולקבל:

$$\underbrace{f(x)-f(0)}=\int_0^x f'(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\frac{\pi}{4}$$

וקיבלנו:

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

טור מתכנס ל- $|x|\le 1$ לכן קיים גבול למשל: $\lim_{x\to 1^-}\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

שאלה

יהי נתון טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ונסמן: $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$l = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

אזי רדיוס ההתכנסות ρ מקיים: $l \le \rho \le L$

הוכחה:

א. נראה כי $\rho \le L$ ולשם כך נראה שלכל $|x|>L$ הטור מתבדר!

יהי $|x|$ כזה ונסמן $\varepsilon = |x|-L$.

מהגדרת $\overline{\lim}$ נקבל שקיים n_0 כך שלכל $n_0 < n$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < |x|$

ומכאן: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| > 1$ ונקבל כי טור $\sum b_n$ כאשר $b_n = a_n x^n$ אזי.

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| > 1$$

לכן הטור מתבדר!

ב. נראה כי $l \le \rho$: נראה כי לכל $|x|<l$ הטור מתכנס:

יהי $|x|<l$. ונגדיר $\varepsilon = l-|x|$. $\Leftarrow$ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l$

לכן מאיזשהו n: $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > l-\frac{\varepsilon}{2}$ $\Leftarrow$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{(l-\frac{\varepsilon}{2})}$

לכן נסתכל על טור: $\sum b_n$ כאשר $b_n = a_n x^n$ ונקבל:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| < \frac{1}{(l-\frac{\varepsilon}{2})}\cdot(l-\varepsilon) < 1$$

מאיזשהו n

לכן $|b_n|$ מתכנס!