פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 7

.1

א. $\frac{8\pi i}{3e^2}$

ב. $2\pi i \sin t$

ג. נראה שיש סינגולריות גם בנקודה $z=0$ - אבל זה לא נכון! קיים הגבול $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z-1)}=-1$ ולכן הסינגולריות שם סליקה. הנקודה "המעניינת" היחידה בעיגול היא $z=1$. ערך האינטגרל הוא $2\pi i\frac{\sin(1)}{1}=2\pi i\sin(1)$.

ד. נרשום $\frac{\cos\pi z}{(z^2-1)^2}=\frac{\cancel{\frac{\cos\pi z}{(z+1)^2}}}{(z-1)^2}$. המונה הוא פונקציה אנליטית בעיגול שלנו. כי הנקודה $z=-1$ לא בתוכו. ע"פ נוסחת קושי מקבלים כי ערך האינטגרל הוא $2\pi i\left(\frac{d}{dz}\right)\left[\frac{\cos\pi z}{(z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=1}=\frac{\pi i}{2}$

(ניתן לפתור גם עם שברים חלקיים, ו"לזרוק" את אלו עם $z+1$ במכנה)

ה. ע"פ נוסחת קושי, $\int_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1}\frac{\sin^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}dz=\frac{2\pi i}{(2n)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2n}\left[\sin^4 z\right]\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}$. בכדי לגזור בנוחות נשים לב כי

$$\sin^4 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4iz}-4e^{2iz}+6-4e^{-2iz}+e^{-4iz}}{16}=\frac{2\cos 4z-8\cos 2z+6}{16}=\frac{\cos 4z-4\cos 2z+3}{8}$$

כך ש

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{2n}\left[\sin^4 z\right]\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\left[4^{2n}(-1)^n\cos(4z)-4(-1)^n 2^{2n}\cos(2z)\right]\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{(-1)^n}{8}\left[4^{2n}+2^{2n+2}\right]$$

האינטגרל בסך הכל הוא $\int_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1}\frac{\sin^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}dz=\frac{2\pi i}{(2n)!}\frac{(-1)^n}{8}\left[4^{2n}+2^{2n+2}\right]$.

2. ע"י נוסחת קושי רואים שבסביבת הנקודה $z=1+i$ מתקיים $f\left(z\right)=2\pi i\left(3z^2+7z+1\right)$ (בגלל שהנקודה בתוך העיגול $\left|z\right|<3$). מכאן שהנגזרת היא $f'(1+i)=2\pi i\left(6\left(1+i\right)+7\right)=2\pi i\left(13+6i\right)=-12\pi+26\pi i$.

3.

א.מאחר ו- f שלמה, היא רציפה. ע"פ משפט ויירשטראס הפונקציה $\left|f\right|$ חסומה בעיגול היחידה הסגור $\overline{\Delta\left(0,1\right)}$. כלומר, קיים חסם M כך שלכל z המקיים $\left|z\right|\le 1$ מתקיים $\left|f\left(z\right)\right|\le 1$. נוכיח שהחסם M תקף בכל המישור.

ובכן תהי נקודה $z_0\in\mathbb{C}$. ע"פ הנתון $f\left(z_0\right)=f\left(\frac{z_0}{2}\right)$, כלומר נוכל לקצר את הנקודה פי 2 ולשמור על ערך הפונקציה. אם נחצה אותה מספיק פעמים נקבל שהערך $f\left(z_0\right)$ זהה לערך של איזושהי נקודה בתוך העיגול הסגור. זה מוכיח כי $\left|f\left(z_0\right)\right|\le M$. ע"פ ליוביל f היא קבועה.

ב. לא. למשל הפונקציה השלמה $f\left(z\right)=z^4$ מקיימת $f\left(z\right)\equiv f\left(iz\right)$.

4. $\left|g\right|=\left|e^f\right|=e^{\mathrm{Re} f}=e^u$ היא חסומה ושלימה ולכן קבועה. כלומר קיים קבוע e^α עבורו $e^{f(z)}=e^\alpha$ לכל $z\in\mathbb{C}$. ז"א שלכל z, $f\left(z\right)=\alpha+2\pi ik$ עבור $k\in\mathbb{Z}$. מכאן שהתמונה של f היא בת מנייה. לא ייתכן ש $f\left(z\right)$ "תקפוץ" בין שתי נקודות שונות בתמונה, כי אז התמונה תהיה בת מנייה.