

מתמטיקה לכימאים - פתרון תרגיל 10

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל. פתרו את המד"רים הבאים

$$1. \begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 4) + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

העע הם $\lambda = -2, -1$ ונמצא ו"ע

$$\bullet \lambda = -2 :$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda = -1 :$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$2. \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

העע הם $\lambda = 1, -1$ הנמצא ו"ע

$\bullet \lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bullet \lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases} .3$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

העע הם $\lambda = 2, -3$ הנמצא ו"ע

$\bullet \lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bullet \lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases} .4$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \right| = (\lambda + 2)(\lambda + 2) - 1 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)$$

העע הם $\lambda = -1, -3$ נמצא ו"ע

$$\bullet \lambda = -1 :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda = -3 :$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases} .5$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 + 1$$

העע הם $\lambda = \pm i$ נמצא ו"ע

$$: \lambda = i \bullet$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \downarrow & \\ \begin{cases} 2v_1 - 5v_2 = iv_1 \\ v_1 - 2v_2 = iv_2 \end{cases} & \\ \downarrow & \\ v_1 = (2+i)v_2 & \\ \downarrow & \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2t) + i \sin(2t)) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) + 2i \sin(2t) + i \cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) + i \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) + \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 \end{cases} .6$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -5 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

העצם $\lambda = -1 \pm i$ נמצא ו"ע

$$: \lambda = -1 + i \bullet$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= (-1+i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \downarrow & \\ \begin{cases} v_1 - v_2 = (-1+i)v_1 \\ 5v_1 - 3v_2 = -1+iv_2 \end{cases} & \\ \downarrow & \\ v_2 = (2-i)v_1 & \\ \downarrow & \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos(t) + i \sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) + i \sin(t) \\ 2 \cos(t) + 2i \sin(t) - i \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2 \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -5x_1 - x_2 \end{cases} .7$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 10 = \lambda^2 + 9$$

העע הם $\lambda = \pm 3i$ ו"ע

$$\lambda = 3i \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = 3iv_1 \\ -5v_1 - v_2 = 3iv_2 \end{cases}$$

$$v_2 = \left(\frac{-1+3i}{2} \right) v_1$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 3i \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 3i \end{pmatrix} (\cos(3t) + i \sin(3t)) = \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) + 2i \sin(3t) \\ -\cos(t) - i \sin(t) + 3i \cos(t) - 3 \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) \\ -\cos(t) - 3 \sin(t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) \\ -\cos(t) - 3 \sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \sin(3t) \\ -\sin(t) + 3 \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{3}{2}x_1 + x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases} .8$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \lambda + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{3}{2} \right) \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

העע הם $\lambda = -1$ ו"ע

$$: \lambda = -1 \bullet$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}v_1 + v_2 = -v_1 \\ -\frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = -v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון אחד הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} 2e^{-t} - 2te^{-t} - v_1e^{-t} = -\frac{3}{2}(2te^{-t} + v_1e^{-t}) + (te^{-t} + v_2e^{-t}) \\ e^{-t} - te^{-t} - v_2e^{-t} = -\frac{1}{4}(2te^{-t} + v_1e^{-t}) - \frac{1}{2}(te^{-t} + v_2e^{-t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2t - v_1 = -\frac{3}{2}(2t + v_1) + (t + v_2) \\ 1 - t - v_2 = -\frac{1}{4}(2t + v_1) - \frac{1}{2}(t + v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = -v_1 + 2v_2 \\ 4 = -v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -4 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 2 \end{cases} \text{ עם תנאי התחלה } \begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases} \quad 9$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ -4 & \lambda + 7 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 7) + 16 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

העע הם $\lambda = -3$ ונמצא ו"ע

$$: \lambda = -3 \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{cases} v_1 - 4v_2 = -3v_1 \\ 4v_1 - 7v_2 = -3v_2 \end{cases}$$

↓

$$v_1 - v_2 = 0$$

↓

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון אחד הוא

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} e^{-3t} - 3te^{-3t} - 3v_1 e^{-3t} = (te^{-3t} + v_1 e^{-3t}) - 4(te^{-3t} + v_2 e^{-3t}) \\ e^{-3t} - 3te^{-3t} - 3v_2 e^{-3t} = 4(te^{-3t} + v_1 e^{-3t}) - 7(te^{-3t} + v_2 e^{-3t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 3t - 3v_1 = (t + v_1) - 4(t + v_2) \\ 1 - 3t - 3v_2 = 4(t + v_1) - 7(t + v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 4v_1 - 4v_2 \\ 1 = 4v_1 - 4v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{4} \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

כעת נציב את תנאי התחלה ונקבל

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = 2$$

$$C_2 = 4$$

לכן הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t+4} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right] = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 2 + 4t \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = -1 \end{cases} \text{ עם תנאי התחלה } \begin{cases} x_1' = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ x_2' = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases} .10$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(\lambda + \frac{5}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) + \frac{9}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

העקם $\lambda = -1$ נמצא ו"ע

$$\bullet \lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -5v_1 + 3v_2 = -2v_1 \\ -3v_1 + v_2 = -2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכופתרון אחד הוא אתם הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} e^{-t} - te^{-t} - v_1 e^{-t} = -\frac{5}{2}(te^{-t} + v_1 e^{-t}) + \frac{3}{2}(te^{-t} + v_2 e^{-t}) \\ e^{-t} - te^{-t} - v_2 e^{-t} = -\frac{3}{2}(te^{-t} + v_1 e^{-t}) + \frac{1}{2}(te^{-t} + v_2 e^{-t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2t - 2v_1 = -5(t + v_1) + 3(t + v_2) \\ 2 - 2t - 2v_2 = -3(t + v_1) + (t + v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = -3v_1 + 3v_2 \\ 2 = -3v_1 + 3v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{2}{3} \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \right]$$

כעת נציב את תנאי התחלה ונקבל

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 \\ C_2 &= -6 \end{aligned}$$

לכן הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - 6 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \right] = \begin{pmatrix} 3 - 6t \\ -1 - 6t \end{pmatrix} e^{-t}$$