תרגיל 5 – אלגברה מופשטת 1

1. יהיו X,Y חבורות ו $f:X\to Y$ הומומורפיזם. תהי $H\lhd X$ ת"ח נורמלית.
הוכיחו כי $f(H)$ ת"ח נורמלית של $f(X)$. האם בהכרח $f(H)\lhd Y$?

2. הוכיחו את הטענות הבאות:

2.1 אם $H\le G$ אז לכל $g\in G$, $gHg^{-1}\le G$ ת"ח מסדר $|H|$.
2.2 אם $K\le H\lhd G$ ו H חבורה ציקלית סופית אז $K\lhd G$.

3. תהי $D_4=<\sigma,\tau>$ החבורה הדיהדרלית מסדר 4, כש $o(\sigma)=4,o(\tau)=2$.
נגדיר: $H=\{e,\tau\sigma,\sigma^2,\tau\sigma^3\}$, $K=\{e,\tau\sigma\}$. הוכיחו כי $H\lhd D_4$ ו $K\lhd H$ אבל K
אינה ת"ח נורמלית של D_4 .

4. יהיו H,K תתי חבורות של G. הוכיחו:

4.1 $KH=HK$ כקבוצות, אם ורק אם $HK\le G$.
4.2 אם $H\lhd G$ ו $K\le G$ אזי $HK\le G$. אם גם $K\lhd G$, אזי $HK\lhd G$.
4.3 קיימת חבורה G ותתי חבורות $H,K\le G$ שאינן נורמליות כך ש $HK\le G$.

5. יהיו G ו H חבורות ו $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם. הוכיחו את הטענות הבאות:
5.1 $\varphi:G\to H$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi=\{1_G\}$.
5.2 אם $\varphi:G\to H$ הוא אפימורפיזם ו G אבלית אז גם H אבלית.

6. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

6.1 קיים מונומורפיזם $f:GL_2(R)\to(R^{16},+)$.
6.2 קיים מונומורפיזם $f:D_7\to S_5$.
6.3 קיים אפימורפיזם $f:C^*\to(R_+,\cdot)$.
6.4 קיים איזומורפיזם $f:(R,+)\to(R_+,\cdot)$.
6.5 קיים אפימורפיזם $f:Z_{60}\to D_4$.

7. יהיו $m<n$ טבעיים. הוכיחו כי $m|n$ אם ורק אם קיים מונומורפיזם
$f:Z_m\to Z_n$.

8. תהי G חבורה ויהיו $H_1,H_2\le G$ תתי חבורות המקיימות $H_1\cong H_2$. הוכיחו או
הפריכו: $[G:H_1]=[G:H_2]$.

9. תהי G חבורה מסדר סופי ו-$N\lhd G$.

9.1. האם יתכן ש- N ו- G/N שתיהן אבליות, אבל G איננה כזאת?

9.2. נניח כי קיים $x \notin N$ כך ש $x^2 \in N$. הוכיחו כי הסדר של G זוגי.

בהצלחה! ☺