תרגיל כיתה 6 - אנליזה מודרנית

התכנסות נשלטת

תזכורת: יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$, ונניח וקיימת פונקציה איטגרבילית $|f_n| \le g$ לכל n . אזי f_n ו f אינטגרביליות ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

1. תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה, מדידה (לבג) ורציפה בנקודה $x_0 = 1$ הוכיחו שהגבול $I = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x)\,dx$ קיים, וחשבו אותו.

פתרון: נוכל לרשום את האינטגרל בצורה הבאה: $\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)\,dx$.

נגדיר את סדרת הפונקציות המדידות $h_n(x) = f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)$.

f רציפה בנקודה 1 ולכן $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = f(1)$ וקיימת פונקציית הגבול $h = f(1) g(x) I_{(-\infty,\infty)}(x) = f(1) g(x)$. יהי M חסם של f . לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $|h_n(x)| \le M|g(x)|$ והפונקציה באגף ימין אינטגרבילית. ע"פ משפט ההתכנסות הנשלטת הגבול הוא $f(1)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$.

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית, $a \in \mathbb{R}$ ונגדיר עבור $x > a$

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\,dm$$

הראו כי F רציפה.

פתרון: ניקח סדרה $a < x_n$ כך ש $x_n \to x$. נגדיר $h_n = f1_{[a,x_n]}$ וברור כי $h_n \to f1_{[a,x]}$ או $h_n \to f1_{[a,x)}$ אשר שוות כב"מ ולכן האינטגרל שלהן זהה. כעת, מכיוון שהסדרה x_n מתכנסת נובע כי מ

n מסויים $x_n < M$, כאשר $x < M \in \mathbb{R}$. נשים לב כי $|h_n| \le |f| 1_{[a,M]}$ וכן $|f| 1_{[a,M]}$ אינטגרבילית.
מכאן שכל התנאים להתכנסות הנשלטת מתקיימים ולכן
$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,x_n]} f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int h_n\,dm = \int_{[a,x]} f\,dm = F(x)$.

3. (generalized DCT) נניח כי f_n, g_n, f ו g הינן איטגרביליות, $f_n \to f$ כב"מ, $g_n \to g$ כב"מ, $|f_n| \le g_n$ לכל n וגם $\int g_n \to \int g$. הוכיחו כי $\int f_n \to \int f$.

פתרון: נגדיר סדרה חדשה של פונקציות חיוביות - $h_n = g_n - f_n$. עפ"י למת פאטו נקבל

$$\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int g_n - f_n = \underline{\lim}\int g_n + \underline{\lim}\int -f_n$$
$$= \lim\int g_n + \underline{\lim}\int -f_n \ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(g_n - f_n) = \int g - f$$
$$\Leftrightarrow \overline{\lim}\int f_n \le \int f$$

מצד שני , נגדיר $h_n = g_n + f_n$ עפי למת פאטו נובע כי

$$\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int f_n + g_n = \underline{\lim}\int f_n + \int g$$
$$\ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(f_n + g_n) = \int f + \int g .$$
$$\Leftrightarrow \underline{\lim}\int f_n \ge \int f$$

מכאן שבסך הכל $\overline{\lim}\int f_n \le \int f \le \underline{\lim}\int f_n$ ולכן $\int f_n \to \int f$.

התכנסות חסומה

תזכורת : יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$, $\mu(X) < \infty$ וגם $|f_n| < M$. אזי f_n, f אינטגרביליות וגם מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$.

4. יהי (X,S,μ) ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו f הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $A \in S$ כך ש $\mu(A) < \infty$ ומתקיים
$$\varepsilon + \int_A f > \int f .$$

פתרון: מכיוון ש $\left(X,S,\mu\right)$ הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $A_n\in S$ כך ש $\mu\left(A_n\right)<\infty$ וגם $X=\bigcup_n A_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי A_n זרות. נסמן $E_k=\bigcup_{n=1}^{k}A_n$ איחוד סופי של קבוצות ונסמן $f_n=f1_{E_n}$, הצימצום של f על E_n . מכיוון ש $X=\bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n\to f$, מכיוון ש f אי שלילית נובע כי $f_n\uparrow f$. נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\lim_{n\to\infty}\int f_n=\lim_{n\to\infty}\int f1_{E_n}=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f=\int f$. מכיוון ש $f\ge f_n$ נובע כי $\int_{E_n} f\le\int f$ ומכאן ש $\int_{E_n} f\uparrow\int f$. קל לראות כי $\mu\left(E_k\right)<\infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\int f>\int_{E_k} f+\varepsilon$ עבור k מספיק גדול.

5. יהיו $f,f_n:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n\to f$ כב"מ ו $f\ge f_n$ לכל n . הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

פתרון:

נחלק לשני מקרים:

(1) $\int f=\infty$: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int \underline{\lim} f_n=\int f\le\underline{\lim}\int f_n\Rightarrow\lim\int f=\infty$

(2) $\int f<\infty$: אזי הסדרה f_n נשלטת ע"י פונקציה אינטגרבילית f ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

6. יהיו $f,f_n:X\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n\to f$ כב"מ. הוכיחו כי $\int|f-f_n|\to 0\Leftrightarrow\int|f_n|\to\int|f|$.

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי $\lim\int|f-f_n|=0$.

אזי

$$\int_X|f_n-f|du\ge\int_X\big||f_n|-|f|\big|du\ge\left|\int_X|f_n|-|f|du\right|=\left|\int_X|f_n|du-\int_X|f|du\right|$$

ומכאן ש

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|du\ge\lim_{n\to\infty}\left|\int_X|f_n|du-\int_X|f|du\right|=0$$

$\Leftarrow$: נניח כי $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|du = \int_X |f|du$.

נשים לב כי $g_n = |f| + |f_n| \geq |f - f_n|$. ברור כי g_n אינטגרבילית וכי $g_n \to g = 2f$ כב"מ וכי $\int g_n \to \int g$ מכך ש $\int |f_n| \to \int |f|$. כעת ברור כי מתקיימים כל התנאים למשפט הכללי של ההתכנסות הנשלטת ולכן נובע כי

$\lim \int |f - f_n| = \int \lim |f - f_n| = 0$. מש"ל.

7. יהי (Ω, S, μ) מרחב מידה. נניח כי $X \subset \Omega$ כך ש $\mu(X) = 1$ וכך ש $A, B, C \subseteq X$ כך ש $\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \geq 2.5$. האם ייתכן כי $A \cap B \cap C = \emptyset$?

פתרון: נניח בשלילה כי $A \cap B \cap C = \emptyset$ ונגדיר את הפונקציות $f = 1_A, g = 1_B, h = 1_C$. מצד אחד $h + f + g \leq 2$ בגלל ש $A \cap B \cap C = \emptyset$ ולכן $\int f + g + hd\mu \leq 2$. מצד שני $\int f + g + hd\mu = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \geq 2.5$ ולכן סתירה.