תרגיל 8

1. יהיו $X_1, ..., X_n$ מרחבים טופולוגיים, עם טופולוגיות τ_i ובסיסים B_i בהתאמה. הראו שהקבוצה $B_\pi = \{O_1 \times \cdots \times O_n | O_i \in B_i\}$ היא בסיס לטופולוגיית המכפלה.

פתרון :

ידוע שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה היא איחוד של מכפלות של קבוצות פתוחות. לכן מספיק להוכיח שכל מכפלה של קבוצות פתוחות, $U_1 \times \cdots \times U_n$ היא איחוד של קבוצות מB_τ.

ובכן, יהי $(x_1, ..., x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$. אז לכל i, $x_i \in U_i$. מהגדרת בסיס, לכל i קיים $O_i \in B_i$ כך ש$x \in O_i \subseteq U_i$. לכן

$$(x_1, ..., x_n) \in O_1 \times \cdots \times O_n \subseteq U_1 \times \cdots \times U_n$$

2. יהיו $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X = \prod X_i$ (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי, עם המטריקה

$$d_{\max}(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) | 1 \le i \le n\}$$

פתרון :

לכל B_i יש בסיס שמורכב מכדורים פתוחים. לכן לפי תרגיל 1 הקבוצה הבאה היא בסיס לטופולוגיית המכפלה :

$$B_\pi = \{B(x_1, r_1) \times \cdots \times B(x_n, r_n)\}$$

לעומת זאת, לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה יש בסיס שמורכב מכפדורים פתוחים $B_{d_{\max}}(x, \varepsilon)$.
נשים לב ש :

$$y \in B_{d_{\max}}(x, \varepsilon) \iff d_{\max}(x, y) < \varepsilon \iff \max\{d_i(x_i, y_i) | 1 \le i \le n\} < \varepsilon \iff \forall i, d_i(x_i, y_i) < \varepsilon \iff \forall i, y$$

לכן $B_{d_{max}}(x, \epsilon) = \prod B_{d_i}(x_i, \epsilon)$.

קיבלנו שכל כדור פתוח לפי המטריקה הוא פתוח לפי טופולוגיית המכפלה, לכן הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה מוכלת בטופולוגיית המכפלה.

מצד שני, נראה שכל קבוצה מהצורה $B(x_1, r_1) \times \cdots \times B(x_n, r_n)$ פתוחה לפי המטריקה.

יהי $(y_1,...,y_n) \in B(x_1,r_1) \times \cdots \times B(x_n,r_n)$.

מכיוון שכל כדור פתוח במטריקה הוא קבוצה פתוחה, קיימים ϵ_i כך ש $B(y_i,\epsilon_i) \subseteq B(x_i,r_i)$.
נבחר $\epsilon = \min\{\epsilon_1,...,\epsilon_n\}$. אז

$$B((y_1,...,y_n),\epsilon) = \prod B_{d_i}(y_i,\epsilon) \subseteq \prod B_{d_i}(y_i,\epsilon_i) \subseteq B(x_1,r_1)\times\cdots\times B(x_n,r_n)$$

לכן הקבוצה $B(x_1,r_1) \times \cdots \times B(x_n,r_n)$ פתוחה לפי המטריקה. ומכאן נקבל שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה פתוחה בטופולוגיה המושרית מהמטריקה. כלומר, טופולוגיית המכפלה מוכלת בטופולוגיה המושרית מהמטריקה.

3. יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d : X \times X \to \mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה).
פתרון:

(א) לפי התרגיל הקודם, $X \times X$ מטריזבילי, והטופולוגיה τ_π מושרית מהמטריקה $d_{\max}$.
נראה, אם כן, שהפונקציה d רציפה לפי המטריקה $d_{\max}$ ולכן גם רציפה לפי τ_π.
תהי $(x,y) \in X \times X$ ויהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. כעת, אם $d_{\max}\left((x,y),(z,w)\right) < \delta$ אז:

$$\left|d\left(x,y\right) - d\left(z,w\right)\right| \le d\left(x,y\right) + d\left(z,w\right) < \delta + \delta = \varepsilon$$

ולכן d רציפה (המעבר הראשון נובע מא״ש המשולש).

4. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ספרביליים. האם $X \times Y$ ספרבילי?
פתרון:

(א) מהגדרת ספרביליות, קיימות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ צפופות ובנות מניה.
מתרגיל שעשינו בכיתה:

$$cl\left(A \times B\right) = cl\left(A\right) \times cl\left(B\right)$$

כלומר:

$$cl\left(A \times B\right) = X \times Y$$

ולכן $A \times B \subseteq X \times Y$ צפופה.
מכיוון שהקבוצות A,B הן בנות מניה גם $A \times B$ בת מניה (למתקדמים: הוכיחו זאת. יש להשתמש בלמה של צורן ובהרבה מצב רוח).
לכן $X \times Y$ ספרבילי.

5. יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים טופולוגיים T_1. הוכיחו שמרחב המכפלה הוא T_1.
פתרון:

(א) אנו יודעים שמספיק להראות שכל נקודון הוא סגור במרחב המכפלה.
אם כן, יהי $\prod \{x_i\}$ נקודון. המשלים שלו הוא הקבוצה:

$$\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$$

כאשר $Y_{i,j}=X_j$ אם $i\neq j$ ו- $Y_{i,j}=X_j\setminus\{x_j\}$ אם $i\neq j$.
בכל מקרה, $Y_{i,j}\subseteq X_j$ פתוחה (אם $i=j$, מכיוון ש-X_j הוא T_1 הנקודון $\{x_j\}\subseteq$ X_j הוא סגור ולכן $X\setminus\{x_j\}$ פתוחה).
מהגדרת טופולוגיית המכפלה, $\prod_j X_j \subseteq \prod_j Y_{i,j}$ פתוחה ולכן גם $\bigcup_i\prod_j Y_{i,j}$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות).
לכן $\prod\{x_i\}$ סגורה.

6. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש: $X\times Y\cong Y\times X$.
פתרון:

(א) נגדיר פונקציה $f:X\times Y\to Y\times X$ על ידי:

$$f(x,y)=(y,x)$$

נשים לב לכך שהפונקציה:

$$p_1\circ f:X\times Y\to Y$$

שווה לפונקציה $p_2:X\times Y\to Y$ ולכן רציפה. כמו כן הפונקציה:

$$p_2\circ f:X\times Y\to X$$

שווה לפונקציה $p_1:X\times Y\to X$.
לכן הפונקציות $p_1\circ f,p_2\circ f$ רציפות ולכן גם f רציפה.
קל לראות שההופכית של f היא הפונקציה:

$$f^{-1}:Y\times X\to X\times Y$$

המוגדרת על ידי $f^{-1}(y,x)=(x,y)$.
f^{-1} רציפה (בדומה ל-f) ולכן f הומיאומורפיזם.

7. הוכיחו שהאותיות הבאות אינן הומיאומורפיות (כתתי קבוצות של $\mathbb{R}^2$):

$$K,B,C,D$$

פתרון:

בK יש נקודה שאם נסיר נקבל מרחב בין 4 רכיבי קשירות, ובשום אות אחרת אין נקודה כזאת. לכן K לא הומיאומורפי לכל השאר.

בC כל נקודה שנוריד תהפוך את המרחב ללא קשיר, ואילו בB ובD יש נקודות שאם נוריד המרחב עדיין ישאר קשיר, לכן C לא הומיאומורפי לBוD.

בB יש נקודה שאם נוריד תהפוך את המרחב ללא קשיר, ואילו בD כל נקודה שנוריד תשאיר את המרחב קשיר. לכן B וD לא הומיאומורפיים.

8. הוכיחו שאם $f:X\to Y$ הוא הומיאומורפיזם, ו$A\subseteq X$, אז $f|_A:A\to f[A]$ הפונקציה המצומצמת, היא הומיאומורפיזם.
פתרון:

חח"ע ועל זה ברור.

נוכיח רציפות:

תהי $O \subseteq f[A]$ פתוחה. כלומר, $O = U \cap f[A]$ כאשר U פתוחה ב-Y. אז

$$f|_A^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[U \cap f[A]] = A \cap f^{-1}[U] \cap f^{-1}[f[A]] = A \cap f^{-1}[U]$$

פתוחה בטופולוגיית תת המרחב על A.

הרציפות של f^{-1} המצומצמת על $f[A]$ מתקבלת בדיוק באותה צורה.