

מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 2

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדב

1. הצרן את המשפטים הבאים לפסוקים בתחשיב פרדיקטים:

- לכל מספר ממשי שונה מאפס קיים הופכי.
- לכל מספר טבעי n , אם קיים מספר טבעי שונה ממנו ומאחד המחלק אותו, אזי n איננו ראשוני.
- לכל שני מספרים טבעיים n, m . קיים מספר טבעי מקסימלי המחלק את שניהם.

פתרון:

א. $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(xy = 1))$

ב. נגדיר את הפרדיקט $P(n) = n \text{ is prime}$. עתה:

$$\forall n(\exists m((m \neq 1) \wedge (m \neq n) \wedge (m | n)) \rightarrow \neg P(n))$$

ג. $\forall m \forall n \exists d((d | m \wedge d | n) \wedge (\forall c((c | m \wedge c | n) \rightarrow (c \leq d)))$

2. קבעו אלו מהפסוקים הבאים אמיתיים כאשר משתני הפרדיקטים נלקחים מהשלמים. אם

הפסוק אינו אמיתי, הראה זאת על ידי בחירת פרדיקט P :

א. $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

ב. $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$

ג. $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

ד. $\forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$

פתרון:

א. לא נכון, ניקח $P(x, y) := (x = 0)$.

ב. לא נכון. ניקח $P(x, y) := (x + y = 0)$

ג. נכון. הוכחה ע"י שקילות.

ד. לא נכון. ניקח $P(x, y) := (x + y = 0)$

3. הראה, על ידי בחירת הפרדיקט Q , כי הפסוק הבא אינו בהכרח נכון:

$$\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \forall y \exists x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge Q(y, x))$$

פתרון: ניקח $Q(x, y) = (x - y = 1)$.

4. הוכח את הטענות הבאות:

א. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

ב. $A \subset B$ אם"מ $P(A) \subset P(B)$

פתרון:

א. $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap B \cap (A \cap C)^c = (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) =$

$(A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) = \emptyset \cup (A \cap B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c =$

$A \cap (B \cap C^c) = A \cap (B \setminus C)$

ב. \leftarrow יהי $C \in P(A)$, אזי $C \subseteq A$ ונתון $A \subset B$ לכן $C \subseteq B$, כלומר $C \in P(B)$.

\rightarrow $A \in P(A)$ ונתון $P(A) \subseteq P(B)$ לכן $A \in P(B)$, כלומר $A \subseteq B$.

5. הוכח כי ההפרש הסימטרי הוא אסוציאטיבי, כלומר $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

פתרון: נוכיח באמצעות טבלאות אמת, כאשר האטומים הם $x \in A, x \in B, x \in C$.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \Delta B$	$x \in B \Delta C$	$x \in A \Delta (B \Delta C)$	$x \in (A \Delta B) \Delta C$
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F