תרגיל 8-פיתרון

1. א. צריך לבחור חברה, גודל ו-עם/בלי סחוג:
לפי עיקרון המכפלה נקבל סה"כ $5\times3\times2=30$

ב. ישנן 15 אפשרויות ל"עם סחוג" ו-15 אפשרויות ל"בלי סחוג". לכן, לפ עיקרון המכפלה:
$15\times15=225$

ג. יש $5\times2=10$ אפשרויות לקופסא מכל גודל, לכן, לפי עיקרון המכפלה: $10\times10\times10=1000$

2. א. אם מתייחסים לאותיות PEPPER כאותיות שונות ישנם !6 סידורים, וצריך לחלק בסידורים הפנימיים של P ו-E: $\frac{6!}{3!2!}=60$

ב. כמו ב-א', יש $\frac{11!}{2!2!2!2!}$ סידורים.

ג. מתייחסים ל-EE,RR,AA באותיות בודדות. סה"כ יש 8 "אותיות" ונוריד את הסידורים הפנימיים של N: $\frac{8!}{2!}$.

3. א. צריך לבחור צרפתי, איטלקי ואנגלי. לפי עיקרון המכפלה: $7\times10\times5=350$.

ב. האפשרויות לבחירת שני לאומים הן: (צרפתי,איטלקי), (צרפתי,אנגלי), (איטלקי, אנגלי), ואין חשיבות לסדר הלאומים. לכן לפי עיקרון הסכום והמכפלה: $7\times10+7\times5+10\times5=155$.

ג. לפי עיקרון הסכום: $\binom{5}{3}+\binom{10}{3}+\binom{7}{3}$ כי בוחרים 3 אנגלים **או** 3 צרפתים **או** 3 איטלקים.

ד. נחשב את המאורע המשלים והוא ששלושת הנבחרים בעלי לאום זהה (סעיף ג) או שהם משלושה לאומים שונים (סעיף א). מספר האפשרויות לבחירת 3 אנשים בלי מיגבלה (היוניברסל) הוא: $\binom{7+10+5}{3}$ ולכן המאורע המבוקש הוא: $\binom{22}{3}-\left(\binom{7}{3}+\binom{10}{3}+\binom{5}{3}\right)-350$.

4. א. $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$.

ב. המאורע המשלים הוא שאף כדור לא צהוב, כלומר, שלושה ירוקים: $\binom{7}{3}-\binom{4}{3}$.

ג. שני ירוקים וצהוב או שני צהובים וירוק:

$$\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}.$$

5. א. מספר שמתחלק ב-2 חייב להסתיים ב-2, לכן יש 3^5 אפשרויות ל-5 ספרות משמאל.

ב. מתחלקים ב-3: סכום כל הספרות חייב להתחלק ב-3. מכיוון ש-9 ו-3 מתחלקים ב-3, סכום כל ה-2-ים חייב להתחלק ב-3. לכן יש 0 או 3 או 6 2-ים:

$$2^6 + \binom{6}{3}\cdot 2^3 + 1 = 225$$

2^6 $\downarrow$ 0 2–ים

$\binom{6}{3}\cdot 2^3$ $\downarrow$ 3 2–ים כולל בחירת מקום בישבילם

1 $\downarrow$ 6 2–ים

ג. מתחלקים ב-6: הסיפרה האחרונה חייבת להיות 2 כי המספרים מתחלקים גם ב-2 וגם ב-3. בנוסף, יש עוד שני 2-ים או שכולם 2:

$$1+\binom{5}{2}2^3$$

1 $\downarrow$ כולם 2

$\binom{5}{2}$ $\searrow$ בחירת מקום לשני ה–2 הנוספים

6. א. בחירת n קלפים לערימה הראשונה קובע את הקלפים שישלחו לערימה השניה: $\binom{2n}{n}$.

ב.

$$\binom{4}{2}\binom{2n-4}{n-2} = 6\binom{2n-4}{n-2}$$

$\binom{4}{2}$ $\downarrow$ בחירת שני הקלפים בערימה הראשונה מתוך 1,…,4

ג.

$$\begin{array}{ccc} 2\times & 4\times & \binom{2n-4}{n-1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{בחירת} & \textit{בחירת} & \textit{בחירת} \\ \textit{הערימה} & \textit{הקלף} & n-1 \\ \textit{ממנה} & \textit{הבודד} & \textit{קלפים} \\ \textit{מגיע} & & \\ \textit{הקלף} & & \\ \textit{הבודד} & & \end{array}$$

ד. $\dfrac{6\binom{2n-4}{n-2}}{2\times 4\times\binom{2n-4}{n-1}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{n-1}{n-2}$

לכן $\begin{cases} n=5 & \textit{יש שויון} \\ n<5 & \textit{סעיף ב גדול יותר} \\ n>5 & \textit{סעיף ג גדול יותר} \end{cases}$

7. כמו לפזר m כדורים ב-n+1 תאים כך שאף תא לא ריק, פרט אולי לתא הראשון והאחרון. שקול למספר הפתרונות של:

$x_1+x_2+...+x_{n+1}=m$ כאשר $x_i\begin{cases}\geq 0, i=1,n+1 \\ \geq 1, \quad O.W.\end{cases}$ אשר שקול למספר הפיתרונות של

$x_1+x_2+...+x_{n+1}=m-(n-1)$ כאשר $\forall i \quad x_i\geq 0$ שהוא: $\binom{m+1}{n}=\binom{m-n+1+n}{n}$

8. כמו לסדר r 1-ים ו-**n-r** 0-ים כך שאין שני אחדים ברצף. כל מיקום של 1 מסמן את המספר מ-{n,...,1} שנבחר. לכן יש: $\binom{n-r+1}{r}$ אפשרויות לפי שאלה 7.

9. א. בוחרים 8 אנשים מתוך 14 ומסדרים אותם סביב השולחן הראשון: (8-1)!
צריך לסדר את ה-6 הנותרים סביב השולחן השני: (6-1)!

סה"כ, כאשר לוקחים בחשבון את בחירת ה-8 מ-14 הראשונים (היתר יקבעו ע"פ זה): $7!5!\binom{14}{8}$

ב. $6!7!\binom{14}{8}$

01. א. מספר הפיתרונות ל- : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300, x_i \geq 0$

$$\binom{300+4-1}{4-1}$$

ב.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300, x_i \begin{cases} \geq 60, i = 1 \\ \geq 80, i = 2 \\ \geq 45, i = 3 \\ \geq 0, i = 4 \end{cases}$$

שקול ל-

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 300 - 60 - 80 - 45, y_i = \begin{cases} x_i - 60 \geq 0, i = 1 \\ x_i - 80 \geq 0, i = 2 \\ x_i - 45 \geq 0, i = 3 \\ x_i \geq 0, i = 4 \end{cases}$$

לכן:

$$\binom{115+4-1}{4-1}$$