

נוסחת טיילור מקלורן

הפיתוח מהרצאה 1 כאשר $x_0 = 0$ נקרא פיתוח מקלורן, ובמקרה כללי פיתוח טיילור.

דוגמה

$$f(x) = e^x$$

הפונקציה גזירה אינסוף פעמים בכל \mathbb{R} ו- $f^{(n)} = e^x$ לכל $n \in \mathbb{N}$, לכן $f^{(n)}(0) = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$. עפ"י פיתוח טיילור, לכל $0 < x < c < \infty$ כך ש:

$$e^x = \underbrace{1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n}_{\text{פיתוח טיילור}} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}_{\text{השגיאה}}$$

עבור $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \vec{r} \quad \text{שגיאה} := \vec{r}$$

$$|r| = \frac{e^c}{(n+1)!} \stackrel{0 < c < 1, 2 < e < 3}{\leq} \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

עבור $n = 5$:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$2.7166 < e < 2.7166 + \frac{1}{240} = 2.7207$$

הערה: כך מחשבוני מחשבים את e .

באופן דומה ניתן לקרב, למשל, את $\tan(23.75)$.

מסקנה

$$e \notin \mathbb{Q}$$

הוכחה

נניח בשלילה כי $e \in \mathbb{Q}$. לכן, קיימים $m, k \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$e = \frac{m}{k}$$

לכן :

$$e = \frac{m}{k} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1$$

נכפיל ב - $k \cdot n!$, ונקבל :

$$k \cdot n! \cdot \frac{e^c}{(n+1)!} \in \mathbb{Z}$$

אבל :

$$0 < \frac{k \cdot e^c}{n+1} \leq \frac{k \cdot e}{n+1} \stackrel{\text{לבסוף}}{\gtrsim} 1$$

סתירה.

■

הערה

לא תמיד פיתוח טיילור מקלורן מועיל בחישוב.

דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$, נקבל :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

כאשר $P_n(t)$ הוא פולינום ב - t ממעלה $3 \cdot n$.

לכן : $f^{(n)}(0) = 0$, לכן בפיתוח טיילור מקלורן סביב $x_0 = 0$ נקבל :

$$f(x) = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + r(x) = r(x)$$

לכן לפיתוח אין ערך.

■

חקירת פונקציות

הבסיס המתמטי העומד מאחורי חקירת פונקציות

הגדרה

פונקציה $f(x)$ היא:

- עולה ממש אם לכל $a < b$ בתחום הפונקציה: $f(a) < f(b)$.
- עולה אם לכל $a < b$ בתחום הפונקציה: $f(a) \leq f(b)$.
- קבועה אם לכל $a < b$ בתחום הפונקציה: $f(a) = f(b)$.
- יורדת אם לכל $a < b$ בתחום הפונקציה: $f(a) \geq f(b)$.
- יורדת ממש אם לכל $a < b$ בתחום הפונקציה: $f(a) > f(b)$.

למה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור.

- $0 \leq f'(x) \Leftrightarrow f$ עולה בקטע
- $0 = f'(x) \Leftrightarrow f$ קבועה בקטע
- $0 \geq f'(x) \Leftrightarrow f$ יורדת בקטע

הוכחה



עפ"י הגדרת הנגזרת.

נניח כי f עולה בקטע.

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

↓

$$f'(x) \geq 0$$

ההוכחה עבור f יורדת בקטע דומה.

אם f קבועה בקטע אזי f עולה וגם יורדת, לכן: $f'(x) \geq 0 \wedge f'(x) \leq 0$, אזי: $f'(x) = 0$.



עפ"י משפט הערך הממוצע (לגרנז'י).

נניח כי $0 \leq f'(x)$ בקטע.

יהיו $a < b$ בקטע. אזי, קיים $a < c < b$ כך ש:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\underbrace{b - a}_{>0}} = \overbrace{f'(c)}^{\geq 0}$$

↓

$$f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

לכן f עולה בקטע.

ההוכחה עבור $0 \leq f'(x)$ בקטע דומה.

ההוכחה עבור $0 = f'(x)$ בקטע נובעת.

ההוכחה עבור קטע סגור דומה, ובנוסף יש לבדוק בנפרד את הקצוות.

■

הערה

הלמה הנ"ל אינה נכונה עבור $f(x)$ עולה ממש ו- $0 < f'(x)$ או $f(x)$ יורדת ממש ו- $0 > f'(x)$.

לדוגמה, $f(x) = x^3$ עולה ממש אך $f'(0) = 0$.

למה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור.

- f עולה ממש בקטע $\Leftrightarrow 0 \leq f'(x)$ ו- $f'(x)$ אינה מתאפס בתת קטע שלם של הקטע הנתון.
- f יורדת ממש בקטע $\Leftrightarrow 0 \geq f'(x)$ ו- $f'(x)$ אינה מתאפס בתת קטע שלם של הקטע הנתון.

הוכחה

עבור f עולה ממש (המקרה השני דומה).

החלק הראשון של הלמה נובע מהלמה הקודמת.

טענה: תהי $f(x)$ פונקציה עולה. אזי $f(x)$ אינה עולה ממש \Leftrightarrow קיים קטע עליו $f(x)$ קבועה.

\Leftarrow : קיים קטע עליו $f(x)$ קבועה, לכן $f(x)$ אינה עולה ממש בקטע הני"ל, ובפרט בקטע הנתון.

\Rightarrow : $f(x)$ אינה עולה ממש, לכן קיימים $a < b$ כך ש: $f(a) \geq f(b)$. לכן $f(x)$ עולה, לכן $f(a) \leq f(b)$, לכן: $f(a) = f(b)$.

לכל $a < x < b$: $f(a) \leq f(x) \leq f(b) = f(a)$, לכן: $f(x) = f(a)$, לכן $f(x)$ קבועה בקטע $[a, b]$.

תרגיל: הסק מהטענה את הדרוש בלמה.



הגדרה

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע נתון.

- נקודה c בקטע היא **נקודת מקסימום מקומי** אם קיימת סביבה של הנקודה c בה לכל x :
 $f(x) \leq f(c)$
- נקודה c בקטע היא **נקודת מינימום מקומי** אם קיימת סביבה של הנקודה c בה לכל x :
 $f(x) \geq f(c)$
- נקודה c בקטע היא **נקודת אקסטרומום (נקודת קיצון)** אם היא נקודת מקסימום מקומי או נקודת מינימום מקומי.

תזכורת (משפט פרמה)

אם c נקודת קיצון ו- $f'(c)$ קיימת, אזי $f'(c) = 0$.

ממשפט פרמה נובע שנקודות הקיצון הן בהכרח נקודות בהן $f'(c)$ לא מוגדר או אפס.

דוגמה

- 0 אינה נקודת קיצון של x^3 , למרות שהנגזרת שם שווה 0.

- 0 אינה נקודת קיצון של $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, למרות שהנגזרת שם לא קיימת.

- 0 נקודת קיצון של $f(x) = |x|$, למרות שהנגזרת שם לא קיימת.

מסקנה

תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי:

1. אם $0 \leq f'(x)$ בסביבה ימנית של c ו- $0 \geq f'(x)$ בסביבה שמאלית של c , אזי c נקודת מינימום.
2. אם $0 \geq f'(x)$ בסביבה ימנית של c ו- $0 \leq f'(x)$ בסביבה שמאלית של c , אזי c נקודת מקסימום.
3. אם הסימן של $f'(x)$ קבוע ושונה מאפס בסביבה של c , אזי c נקודת קיצון.

הוכחה

1. נתבונן בסביבה של הנקודה c שהיא איחוד הסביבות הנתונות, או מוכלת בהן, יחד עם הנקודה c .
יהי $x \neq c$ שם.
אם x בסביבה הימנית, משום ש- $0 \leq f'(x)$, עפ"י למה קודמת $f(x)$ עולה שם, לכן $f(c) \leq f(x)$.
אחרת, בסביבה x השמאלית, ומשום ש- $0 \geq f'(x)$, עפ"י למה קודמת $f(x)$ יורדת שם, לכן $f(c) \leq f(x)$.
לכן, c נקודת מינימום.
2. באופן דומה להוכחת 1.
3. אם הסימן של $f'(x)$ חיובי שם, עפ"י למה קודמת $f(x)$ עולה ממש שם, לכן c איננה נקודת קיצון.
באופן דומה עבור סימן שלילי.



הערה

הנחת הרציפות במסקנה הנ"ל הכרחית.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ : לדוגמה}$$