אינפי 4 : תרגול 4

22 מרץ 2016

<u>תזכורת</u>: תבנית דיפרנציאלית לינארית ω המוגדרת בקבוצה הפתוחה $D \subset \mathbb{R}^n$ נקראת מדויקת אם קיימת פונקציה f ב־$C^1(D)$ כך ש־$\omega = df$. נאמר ש־f היא פונקציית הפוטנציאל של ω.

<u>משפט</u>: אם ω היא תבנית מדויקת המוגדרת בקבוצה הפתוחה $D \subset \mathbb{R}^n$ עם פונקציית פוטנציאל f ו־$\gamma : [a,b] \to D$ עקומה חלקה, אז

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

<u>דוגמא</u>: חשבו את האינטגרל

$$\int_\gamma \left(\sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\right) dx + \left(\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}}\right) dy + \left(\sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}}\right) dz$$

כאשר

$$\gamma(t) = \left(2 - \sin(\pi t), 2 + t\cos(2\pi t), e^{t-t^2}\right), t \in [0,1].$$

<u>פתרון</u>: נוכיח קודם שהתבנית

$$\omega = \left(\sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\right) dx + \left(\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}}\right) dy + \left(\sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}}\right) dz$$

מדויקת בתחום $x, y, z > 0$. אכן, ω סגורה כי

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

כעת נמצא את פונקציית הפוטנציאל f.

$$f_x = \sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f = x\sqrt{z} + y\sqrt{x} + C(y,z),$$

$$\Rightarrow f_y = \sqrt{x} + C_y(y,z) = \sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}}.$$

לכן $C_y(y,z) = \frac{z}{2\sqrt{y}}$ ואז $C(y,z) = z\sqrt{y} + C_0(z)$. נציב זאת בנוסחא ל־$f$:

$$f = x\sqrt{z} + y\sqrt{x} + z\sqrt{y} + C_0(z)$$

$$\Rightarrow f_z = \frac{x}{2\sqrt{z}} + \sqrt{y} + C_0'(z) = \sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}}.$$

מכאן נקבל ש־ $C_0'(z) = 0$ ולכן $C_0(z) = c$ כאשר c קבוע. לכן

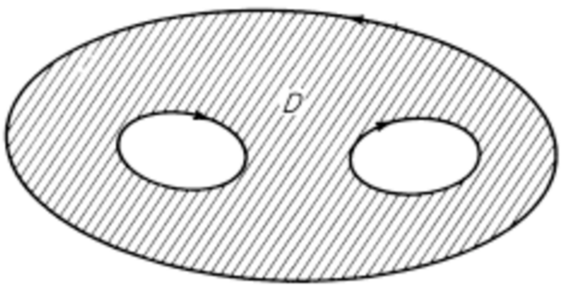
$$f = x\sqrt{z} + y\sqrt{x} + z\sqrt{y} + c.$$

כעת, כיוון ש־$\gamma(0) = (2,2,1)$ ו־$\gamma(1) = (2,3,1)$ נקבל מהמשפט שניסחנו ש־

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(2,3,1) - f(2,2,1)$$
$$= 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{3}.$$

משפט גרין

הקדמה: משפט גרין נותן קשר מסוים בין אינטגרציה על קבוצות במישור לבין אינטגרציה על השפה שלהן. לכן, במקרים מסוימים נוכל להמיר אינטגרציה על עקומה (שהיא שפה של קבוצה) לאינטגרציה על תחום במידה והדבר יקל עלינו בחישוב האינטגרל (ולהיפך, נוכל לעשות אינטגרציה על עקומה במקום על תחום אם זה יקל עלינו).



הערה: תהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תת־קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה) וקשירה כך שהשפה של D של ∂D היא איחוד סופי של עקומות חלקות למקוטעין, סגורות וזרות בזוגות. אנו תמיד נניח שהשפה ∂D מכוונת בצורה כזו כך שהעקומה החיצונית של השפה (כלומר העקומה $\gamma \subset \partial D$ שהפנים שלה מכיל את שאר העקומות ששייכות לשפה) מכוונת נגד כיוון השעון, ושהעקומות הפנימיות מכוונות עם כיוון השעון (ראו דוגמא באיור למעלה).

משפט גרין: תהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תת־קבוצה המקיימת את התנאים של ההערה הקודמת ויהיו $P = P(x,y)$ ו־$Q = Q(x,y)$ פונקציות ב־$C^1(D)$, אז

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

כלומר, אם $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$ כאשר γ_1 היא העקומה החיצונית ושאר העקומות הן פנימיות, אז

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy$$

כאשר את γ_1 יש לכוון נגד כיוון השעון ואת γ_2 עד γ_n יש לכוון עם כיוון השעון.

הערה: במקרה ש־$Q = x$ ו־$P = -y$ נקבל את נוסחת השטח הבאה:

$$\text{Vol}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

דוגמא: בעזרת משפט גרין חשבו

$$\int_\gamma (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$$

כאשר γ הוא המשולש ABC כאשר $A = (0,0), B = (2,2), C = (0,1)$ בכיוון מ־A ל־C.

פתרון: אם נסמן ב־D את הפנים של המשולש נקבל ממשפט גרין

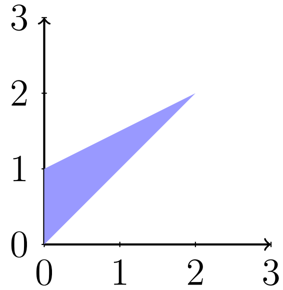
$$\int_\gamma (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^2 - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)^2\right] dxdy$$

$$= \iint_D \left[2(x+y) + 2(x-y)\right] dxdy = 4\iint_D xdxdy$$

$$= \int_0^2 \int_x^{\frac{1}{2}(x+2)} x dy dx = \int_0^2 x \int_x^{\frac{1}{2}(x+2)} dy dx$$

$$= \int_0^2 x \cdot y|_{y=x}^{y=\frac{1}{2}(x+2)} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x(2-x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}.$$



<u>דוגמא</u>: בעזרת משפט גרין חשבו

$$\int_\Gamma \left(y + \sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x + \cos y) dy$$

כאשר

$$\Gamma = \left\{(x,y) : x^2 + \frac{4y^2}{\pi^2} = 1, x \geq 0\right\}$$

מכוונת נגד כיוון השעון.

<u>פתרון</u>: נשים לב ש־Γ איננה עקומה סגורה, לכן נשלים את Γ לעקומה סגורה

$$\Gamma' = \Gamma \cup \left\{\left(0, \frac{\pi}{2} - t\right) : t \in [0,\pi]\right\}$$

ונשים לב ש־Γ' אכן מכוונת נגד כיוון השעון. לכן ממשפט גרין נקבל

$$\int_\Gamma \left(y + \sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x + \cos y) dy$$

$$= \int_{\Gamma'} \left(y + \sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x + \cos y) dy$$

$$- \int_\gamma \left(y + \sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x + \cos y) dy$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x+\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y+\sin\left(x^3\right)\right)\right] dxdy$$

$$- \int_\gamma \left(y+\sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x+\cos y)dy$$

כאשר D הוא הפנים של Γ' ו־

$$\gamma(t) = \left(0, \frac{\pi}{2} - t\right), t \in [0,\pi].$$

לכן נקבל ש־

$$\int_\Gamma \left(y+\sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x+\cos y)dy$$

$$= 2\int_D dxdy - \int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt)$$

$$= 2\int_D dxdy + \int_0^\pi \sin t dt$$

כעת אם נשתמש בכך שלחצי האליפסה D יש צירים $a = 1$ ו־$b = \frac{\pi}{2}$ ובכך ששטח אליפסה עם צירים a ו־b הוא πab נקבל

$$\int_\Gamma \left(y+\sin\left(x^3\right)\right) dx + (3x+\cos y)dy$$

$$= \pi \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos t|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi^2}{2} + 2.$$

<u>דוגמא:</u> חשבו את השטח התחום בתוך העלה של דקרט $x^3 + y^3 = 3xy$ (ראו איור למעטה).

<u>פתרון:</u> קודם נמצא פרמטריזציה לעקום זה. נסמן $y = tx$ ונקבל

$$x^3 + t^3x^3 = 3tx^2 \Rightarrow (1+t^3)x^3 = 3tx^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{3t}{1+t^3} \Rightarrow y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

כמו כן נניח ש־$t \geq 0$ כיוון שה־"עלה" נמצא ברביע הראשון שבו ערכי x ו־y חיוביים. כעת נשתמש בנוסחת השטח

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy$$

כדי לקבל

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[-\frac{3t^2}{1+t^3}\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)' + \frac{3t}{1+t^3}\left(\frac{3t^2}{1+t^3}\right)'\right] dt$$

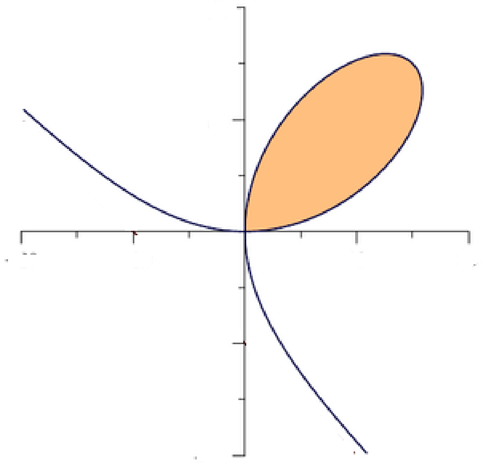
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[-\frac{3t^2}{1+t^3}\left(\frac{3(1+t^3)-3t^2\cdot 3t}{(1+t^3)^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{3t}{1+t^3}\left(\frac{6t(1+t^3)-3t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[-\frac{3t^2}{1+t^3}\cdot\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2} + \frac{3t}{1+t^3}\cdot\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(9t^2+9t^5)dt}{(1+t^3)^3} = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{3}{2}.$$



משטחים ב־$\mathbb{R}^n$

הקדמה: עבור תת־קבוצה $M \subset \mathbb{R}^n$ נאמר, בשפה לא פורמלית, ש־M היא **משטח ממימד** k אם לכל נקודה $x \in M$ קיימת סביבה $U \subset \mathbb{R}^n$ של x כך שהקבוצה $U \cap M$ "נראית" כמו המרחב $\mathbb{R}^k$. כלומר, הקבוצה M נראית באופן מקומי כמו $\mathbb{R}^k$ עבור כל נקודה שנבחר ב־M.

הערה: עבור תת־קבוצה $U \subset \mathbb{R}^n$ ופונקציה $f : U \to \mathbb{R}^m$ שגזירה ברציפות, נסמן ב־

$$D_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x)$$

את הדיפרנציאל של f בנקודה $x \in U$.

כעת ניתן שלוש הגדרות פורמליות שקולות למשטח ממימד k ב־$\mathbb{R}^n$:

הגדרה 1: תת־קבוצה $M \subset \mathbb{R}^n$ ($M \neq \emptyset$) נקראת **משטח** ממימד k אם לכל $x \in M$ קיימת סביבה U של x ופונקציה $F : U \to \mathbb{R}^p$ ($p = n - k$), שגזירה ברציפות, כך ש־

$$M \cap U = \{x \in U : F(x) = 0\}$$

וכך שלכל $x \in M \cap U$, $rank(D_F(x)) = p$ (כלומר הדרגה של D_F היא מקסימלית לכל נקודה ב־$M \cap U$).

הגדרה 2: תת־קבוצה $M \subset \mathbb{R}^n$ ($M \neq \emptyset$) נקראת **משטח** ממימד k אם לכל $x \in M$ קיימת סביבה U של x כך שהקבוצה $M \cap U$ היא גרף של פונקציה גזירה ברציפות f מ־$W \subset \mathbb{R}^k$ ל־$\mathbb{R}^{n-k}$. כלומר

$$M \cap U = \{(\omega, f(\omega)) : \omega \in W \subset \mathbb{R}^k\}.$$

הגדרה 3: נאמר ש־$M \subset \mathbb{R}^n$ היא **משטח** ממימד k אם לכל $x \in M$ קיימת סביבה U של x, קבוצה פתוחה $V \in \mathbb{R}^k$, ופונקציה גזירה ברציפות וחח"ע $r : V \to M \cap U$ כך ש־$rank(D_r(v)) = k$ לכל $v \in V$.

דוגמאות:

1. נתבונן בקבוצה

$$Z_F = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 = 0\}.$$

נבדוק האם קבוצה זו היא משטח. הדיפרנציאל של F (שבמקרה זה הוא הגראדינט) נתון לפי

$$\nabla F(x, y, z) = (-2x, -2y, 2z).$$

לכן ה־$rank$ של ∇F איננו מקסימלי בנקודה $(0, 0, 0)$ שאכן נמצאת בקבוצה Z_F (כי $F(0, 0, 0) = 0$). לכן Z_F איננה מהווה משטח.
מבחינה גאומטרית, הקבוצה Z_F מתארת חרוט עם "חוד" בראשית, לכן אינטואיטיבית בסביבת החוד קבוצה זה לא דומה למרחב אוקלידי ממימד 2 (כלומר למישור).

2. נתונה ההעתקה $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ לפי

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1x_2 + x_3x_4 \end{pmatrix}$$

קבעו האם הקבוצה $\Phi^{-1}(0)$ מתארת משטח ב־$\mathbb{R}^4$.

פתרון: נחשב את הדיפרנציאל של Φ

$$D_\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4} \\ \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}$$

כעת נבדוק האם יש נקודות $x \in \Phi^{-1}(0)$ עבורן ה־$rank$ של $D_\Phi(x)$ לא מקסימלי. נבדיל בין שני מקרים

- אם עבור $x \in \mathbb{R}^4$ אחת השורות של $D_\Phi(x)$ שווה לאפס אז בפרט נקבל ש־$x_1 = x_2 = 0$ ואז המשוואה $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ לא מתקיימת.
- אם עבור $x \in \mathbb{R}^4$ השורות של $D_\Phi(x)$ פרופורציונאליות, אז קיים $\lambda \neq 0$ כך ש־

$$x_2 = 2\lambda x_1, x_1 = 2\lambda x_2, x_3 = \lambda \cdot 0, x_4 = \lambda \cdot 0.$$

לכן בפרט נקבל ש־$x_3 = x_4 = 0$. לכן מהמשוואה $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ נקבל ש־$x_1x_2 = 0$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$x_1 = 0$, אז מהמשוואה $x_2 = 2\lambda x_1$ נקבל ש־$x_2 = 0$ ואז שוב המשוואה $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ לא תתקיים.

לכן בכל מקרה אין נקודות ב־$\Phi^{-1}(0)$ שעבורן הדרגה של D_Φ לא מקסימלית. לכן $\Phi^{-1}(0)$ היא משטח.

דוגמא: הוכיחו שספירת היחידה $\mathbb{S}^2$ ב־$\mathbb{R}^3$ היא משטח לפי הגדרה 3, כלומר מצאו כיסוי ל־$\mathbb{S}^2$ ע"י פרמטריזציות חלקות וחד־חד־ערכיות (כמובן עם דרגה מקסימלית).

דוגמא: קודם נשים לב שהפרמריזציה הסטנדרטית של הספירה:

$$(\theta,\phi) \mapsto (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi),\ \ \theta \in [0,2\pi),\ \phi \in [0,\pi]$$

איננה חד־חד ערכית כי

$$(\theta, 0) \mapsto (0,0,1), \forall\theta \in [0,2\pi).$$

תחילה נכסה את החלק העליון של הספירה ע"י הפרמטריזציה

$$r_1(x,y)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right),x^2+y^2<1.$$

שימו לב שלא יכולנו לכלול בתחום ההגדרה את השפה $x^2+y^2=1$ כי r_1 לא גזירה ברציפות בתחום זה. כעת נכסה את החלק התחתון של הספירה ע"י הפרמטריזציה

$$r_2(x,y)=\left(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}\right),x^2+y^2<1.$$

כעת נשאר לכסות את המעגל $x^2+y^2=1,z=0$. לכן נגדיר את הפרמטריזציות

$$r_3(x,z)=\left(x,\sqrt{1-x^2-z^2},z\right),x^2+z^2<1,$$

$$r_4(x,z)=\left(x,-\sqrt{1-x^2-z^2},z\right),x^2+z^2<1.$$

כעת נשאר לכסות את הנקודות $(\pm1,0,0)$. לכן נגדיר את הפרמטריזציות

$$r_5(x,z)=\left(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right),y^2+z^2<1,$$

$$r_6(x,z)=\left(-\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right),y^2+z^2<1.$$