הרצאה 21

31 בדצמבר 2013

למה:

P מלבן n מימדי, $f:P\to\mathbb{R},|f(x)|<C$, אזי:
$\forall\mathcal{P},\mathcal{Q}:\underline{S}(f,\mathcal{Q})\le\overline{S}(f,\mathcal{P})$

הוכחה

$\mathcal{R}:=\mathcal{P}\mathring{\cap}\mathcal{Q}$

$$\overline{S}(f,\mathcal{F})=\sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)=$$

$$\sum_i\left(\sum_j\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}f(x)\,vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)\right)\le\sum_i\left(\sum_j\sup_{x\in P_i}f(x)\,vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)\right)$$

$$=\sum_i\sup_{x\in P_i}f(x)\sum_j vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)=\sum_i\sup_{x\in P_i}f(x)\,vol(P_i)=\overline{S}(f,P)$$

הוכחנו כי $\overline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,P)$. מתקיים גם $\underline{S}(f,\mathcal{R})\ge\underline{S}(f,Q)$ ולכן:

$$\underline{S}(f,Q)\le\underline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,P)$$

$$\Rightarrow\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)$$

$$M:=\sup_{x\in P}f(x)$$

$$m:=\inf_{x\in P}f(x)$$

$$\overline{S}(f,P)=\textstyle\sum_i\sup_{x\in P_i}f(x)\,vol(P_i)\le M\sum_i vol(P_i)=Mvol(P)$$

$$\underline{S}(f,P)=\textstyle\sum_i\inf_{x\in P_i}f(x)\,vol(P_i)\ge m\sum_i vol(P_i)=mvol(P)$$

$$mvol(P)\le\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)\le Mvol(P)$$

הגדרה

$f:P\to P,|f(x)|\le C$
$\inf_P\overline{S}(f,P):=\overline{I}$ אינטגרל עליון
$\sup_Q\underline{S}(f,Q):=\underline{I}$ אינטגרל תחתון
נשים לב כי: $\forall P_1,Q_1:\underline{I}\le\sup_Q\underline{S}(f,Q)\le\underline{S}(f,Q_1)\le\overline{S}(f,P_1)\le\inf_P\overline{S}(f,P)=\overline{I}$

הגדרה

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$
אומרים כי f אינטגרבילית לפי רימן־דרבו $f\in\mathcal{R}(P)$ אם $\underline{I}(f)=\overline{I}(f):=I(f)=\int_P f(x)$

משפט

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$
$f\in\mathcal{R}(P)$ אם ורק אם $\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon$

הוכחה

נניח כי התנאי מתקיים

$$\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon$$
$$\overline{S}(f,P)<\underline{S}(f,P)+\epsilon$$
$$\overline{I}=\inf_Q\overline{S}(f,Q)<\underline{S}(f,P)+\epsilon$$
$$\overline{I}-\epsilon<\underline{S}(f,P)$$
$$\overline{I}-\epsilon<\sup_Q\underline{S}(f,Q)=\underline{I}$$
$$0\le\overline{I}-\underline{I}<\epsilon$$
$$\epsilon\to0\Rightarrow\overline{I}=\underline{I}\Rightarrow f\in\mathcal{R}(P)$$

בכיוון השני, נניח כי $f\in\mathcal{R}(P)$

נקבע $\epsilon>0$

$$\exists Q:I-\epsilon<\underline{S}(f,Q)\le I$$
$$\exists P:I<\overline{S}(f,P)\le I+\epsilon$$
$$I-\epsilon<\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)\le I+\epsilon$$

אז: $F:=P\overset{\circ}{\cap}Q$

$$I-\epsilon<\underline{S}(f,Q)\le\underline{S}(f,F)\le\overline{S}(f,F)\le\underline{S}(f,P)\le I+\epsilon$$
$$0\le\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)\le2\epsilon$$
$$\boxed{f\in\mathcal{R}(P)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon}$$

משפט

אם $f\in C(P)$ אזי $f\in\mathcal{F}(P)$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$, לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש בP.

$$\exists\delta>0:\forall x,y\in P:||x-y||_\infty<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$$
$$P=[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]$$

ניקח N טבעי כך ש: $\frac{\max(b_i-a_i)}{N}<\delta$

$$\frac{\max(b_I-a_i)}{\delta}<N$$
$$\Delta_i^{(s)}=a_i+\frac{s}{N}(b_i-a_i)$$
$$P=\left\{\Delta_1^{(i_1)}\times...\times\Delta_n^{(i_n)}\right\}=\{P_i\}$$

$x,y\in P_i$ כי $||x-y||_\infty<\delta$ ולכן $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ וגם $|M_i-m_i|<\epsilon$

$$M_i=\sup_{x\in P_i}f(x)=f(x_{max}),m_i=\inf_{x\in P_i}f(x)=f(x_{min})$$
$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_iM_iV(P_i)-\sum_im_iV(P_i)=\sum_i(M_i-m_i)V(P_i)<\epsilon\sum_iV(P_i)=\epsilon V(P)$$
$$\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon V(P)$$

ולכן לפי הקריטריון $f\in\mathcal{R}(P)$

קבוצות ממידה אפס

הגדרה

$N\subset\mathbb{R}^n$ ממידה 0. $mesN=0$ אם $\forall\epsilon\,\exists\{P_i\}_{i=1}^\infty$ P_i קטעים, כך ש $N\subset\bigcup_{i=1}^n\overset{\circ}{P}_i$ ו $\sum_{i=1}^\infty V(P_i)<\epsilon$

דוגמא

רציונלים $n=1:\{r_n\}_{n=1}^\infty$

נקבע $\epsilon>0$

$$P_n=\left(r_n-\frac{\epsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$$
$$\mathbb{Q}\subset\bigcup_{n=1}^\infty P_n$$
$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon$$

עוד דוגמא היא קבוצת קנטור.

הערה

אם N קומפקטית:
$mesN=0\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\exists\left\{ P_{i}\right\} _{i=1}^{M}:N\subset\bigcup_{i=1}^{M}P_{i},\sum_{i=1}^{m}V\left(P_{i}\right)<\epsilon$

למה

N קומפקטית אז כל כיסוי $N\subset_{i=1}^{\infty}P_{i}$ כולל תת־כיסוי סופי.

משפט

$f:P\to\mathbb{R},\left|f\left(x\right)\right|<C$. נניח ש$f\in C\left(P-N\right)$ עבור N קבוצה קומפקטית, $mesN=0$, אזי $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$
מלמה קודמת $N\subset P_{1}\cup...P_{M}$ כך ש$\sum_{i=1}^{M}V\left(P_{i}\right)<\epsilon$.
נתבונן ב$K:=P-\left(\bigcup_{i=1}^{M}P_{i}\right)$
K קבוצה חסומה וסגורה, קומפקטית.
$\mathcal{P}'$ חלוקה שמוכלת ב $\left\{ P_{i}\right\} _{i=1}^{M}$, $f\in C\left(K\right)$ ולכן לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש.
$\exists\delta>0:\left|\left|x-y\right|\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\epsilon$
בונים חלוקה $\mathcal{P}''$ כך ש:
$$\forall P_{i}''\subset K:\left|\underset{P_{i}}{\sup}f\left(x\right)-\underset{P_{i}}{\inf}f\left(x\right)\right|<\epsilon$$
$\mathcal{P}'''=\mathcal{P}'\overset{\circ}{\cap}\mathcal{P}''$
מקבלים חלוקה $\left\{ Q_{j}\right\} =\mathcal{P}'''$
$\forall Q_{j}\in\mathcal{P}'':Q_{j}\overset{\circ}{\cap}P_{i}\neq\phi$
$$\left|\underset{Q_{j}}{\sup}f\left(x\right)-\underset{Q_{j}}{\inf}f\left(x\right)\right|<\epsilon$$ לפי רציפות במ"ש.
$\overline{S}\left(f,\mathcal{P}'''\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}'''\right)=$
$\sum_{i=1}^{M}\left(\sup_{x\in P_{i}}f\left(x\right)-\inf_{x\in P_{i}}f\left(x\right)\right)V\left(P_{i}\right)+\sum_{Q_{j}\in\mathcal{P}'''}\left(\sup_{x\in Q_{j}}f\left(x\right)-\inf_{c\in Q_{j}}f\left(x\right)\right)V\left(Q_{j}\right)$
$\left|f\left(x\right)\right|\leq C$
$\left|\sup_{x\in P_{i}}f\left(x\right)-\inf_{c\in P_{i}}f\left(x\right)\right|\leq2C$

1. $\sum_{i=1}^{M}\left(\sup_{x\in P_{i}}f\left(x\right)-\inf_{x\in P_{i}}f\left(x\right)\right)V\left(P_{i}\right)\leq2C\sum_{i=1}^{M}V\left(P_{i}\right)<2c\epsilon$
2. $\sum_{Q_{j}\in\mathcal{P}'''}\left(\sup_{x\in Q_{j}}f\left(x\right)-\inf_{c\in Q_{j}}f\left(x\right)\right)Vol\left(Q_{j}\right)\leq\epsilon Vol\left(P\right)$

$\Rightarrow\left|\overline{S}-\underline{S}\right|\leq2C\epsilon+\epsilon Vol\left(P\right)$
כלומר אם היינו לוקחים $\frac{\epsilon}{2C+Vol\left(P\right)}$ היה יוצא קטן מϵ.

נפח

הגדרה

תהי $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$, פונקציה קרקטריסטית charactertic function (indicator) :
$$\chi_{\Omega}\left(x\right)=\begin{cases} 1 & ,x\in\Omega\\ 0 & ,x\notin\Omega \end{cases}$$

הגדרה

Ω קבוצה חסומה: $\exists P:\Omega\subset P$
Ω בעלת נפח (מדידה לפי רימן) אם $\chi_{\Omega}\in\mathcal{R}\left(P\right)$

הגדרה

אם Ω מדידה אז $\int\chi_{\Omega}\left(x\right)dx:=Vol\left(\Omega\right)$