אנליזה 1 תשפ מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x+\sin(x))}{x+\sin(x)}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}\cdot\frac{x\left(x+\sin(x)\right)}{(3x)^2}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

כאשר הגבול האחרון מחושב

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sin(x)\right)}{(3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\frac{\left(x+\sin(x)\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right)=\frac{1}{9}\left(1+1\right)$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}x^{\left(e^{-x}\right)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}x^{\left(e^{-x}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(x^{\left(e^{-x}\right)}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{e^{-x}\ln(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left[e^{-x}\ln(x)\right]}$$

כעת נחשב

$$\lim_{x\to\infty}\left[e^{-x}\ln(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=0$$

ולכן הגבול בסה"כ שווה ל $e^0=1$.

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!\cdot 2^n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=2\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to 2\cdot 1\cdot e^{-1}$$

וכיוון ש $\frac{2}{e}<1$ נקבל ש $\lim a_n=0$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(a+x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x}=a$$

לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{a+x}}{1}=0$$

ולכן רק עבור $a=0$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=0$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

כלומר $f'(0)$ קיים ושווה ל 0.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}$ וכן $a_1=\frac{1}{2}$.

(א) הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n<1$.

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1=\frac{1}{2}$ והוא קטן ממש מ 1.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n<1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1}<1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}<\frac{1^3+1}{2}=1$$

כאשר אי השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה.

(ב) חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים $0<a_n$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1=\frac{1}{2}$ והוא חיובי.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר a_n חיובי. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר a_{n+1} חיובי. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}<\frac{1^3+1}{2}=1$$

ומכיוון ש $a_n > 0$ (לפי הנחת האינדוקציה) וכפל/חילוק וחיבור של חיוביים הוא חיובי נקבל שגם a_{n+1} חיובי.
כעת- טענה: הסדרה מונוטונית יורדת. הוכחה: לפי הגדרה $a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2}$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3 + a_n}{2} - a_n = \frac{a_n^3 - a_n}{2} = a_n \left(\frac{a_n^2 - 1}{2}\right) = \frac{a_n (a_n + 1)(a_n - 1)}{2} < 0$$

שהרי $(a_n - 1)$ שלילי לפי סעיף קודם וכל שאר הגורמים חיוביים. כלומר, אכן קיבלנו שהסדרה מונוטונית יורדת.
כיוון שהסדרה חסומה ע"י 0 יש לסדרה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \to \frac{L^3 + L}{2}$$

כלומר $L = \frac{L^3+L}{2}$. נעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$0 = L\left(\frac{L^2 + 1}{2} - 1\right) = L\left(\frac{L^2 - 1}{2}\right) = L\frac{(L-1)(L+1)}{2}$$

ולכן $L \in \{0, 1, -1\}$. כיוון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והסדרה יורדת, האפשרות $L = 1$ נפסלת. בנוסף, ראינו שלכל n מתקיים $0 < a_n$ ולכן $0 \le L$ וזה פוסל את האפשרות $L = -1$. נשארנו עם אפשרות אחת שהיא $L = 0$.

4. קבעו לכל ערך $a \in \mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 - 3x = a$ (הפרידו למקרים).
פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x^3 - 3x - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x-1)(x+1)$$

ולכן, ± 1 הן הנקודות היחידות בהן $f' = 0$ ונסתכל בטבלה

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

להסיק כי f עולה ממש בקרן $(-\infty - 1)$ ובקרן $(1, \infty)$ויורדת ממש בקטע $(-1, 1)$ ולכן בכל אחד מהקטעים/קרנות הנ"ל f יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר). מתקיים כי

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 - a \\ f(1) &= -2 - a \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

(הגבולות נובעים מכך ש f פולינום ממעלה אי זוגית, 3). ולכן:

- עבור $a < -2$ נקבל ש $f(-1) > 0, f(1) > 0$ ולכן ב $[-\infty - 1]$ הפונקציה מחליפה סימן (לפי הגבול קיימת נקודה בקרן זו ב f שלילית) ולא מתאפסת ב -1 ולכן חותכת פעם אחת בלבד את ציר x כי בקרן זו f רציפה + משפט ערך הביניים + חח"ע (חח"ע בגלל שעולה/יורדת ממש). בקטע $[-1, 1]$ הפונקציה f יורדת ובקרן $(1, \infty)$ עולה ומכיוון ש $f(1) > 0$

נקבל שבקרן $(-1,\infty)$ אין חיתוך עם ציר x. לסיכום: במקרה זה יש שורש יחיד (בקרן $(-\infty,-1]$).

- עבור $a=-2$ נקבל ש $f(-1)>0, f(1)=0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $(-\infty,-1]$ ופעם יחידה בקרן $(-1,\infty)$ (בנקודה 1) ולכן סה"כ יהיו שני שורשים.
- עבור $-2<a<2$ נקבל ש $f(-1)>0, f(1)<0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $(-\infty,-1]$ ובאופן דומה תהיא נקודת חיתוך יחידה ב $[-1,1]$ (בקטע זה fמחליפה סימן ולא מתאפסת ב ±1) ובאופן דומה תהיה נקודת חיתוך יחידה ב $[1,\infty)$ (שהיא לא 1) ולכן בסה"כ יהיו 3 שורשים.
- עבור $a=2$נקבל ש $f(-1)=0, f(1)<0$ ובאופן דומה יהיו שני שורשים (אחד ב -1 ואחד בקרן $[1,\infty)$).
- עבור $a>2$ נקבל ש $f(-1)<0, f(1)<0$ ובאופן דומה יהיה שורש יחיד בקרן $[1,\infty)$.

5. תהיא f פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת f' היא פונקציה עולה אזי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
פתרון: הפרכה: $f(x)=2$ מקיימת כי $f'(x)=0$ עולה אבל $\lim_{x\to\infty} f(x)=2\neq\infty$

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת f' היא פונקציה חיובית ועולה אזי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
פתרון: הוכחה: כיוון ש $f'>0$ חיובית נסיק ש f עולה בכל $\mathbb{R}$. נוכיח $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ לפי ההגדרה. יהיה M נתון ונראה שהחל ממקום מסוים $f(x)>M$. טענה: קיים x_0 המקיים $f(x_0)>M$ ואז החל ממנו, כיוון ש f עולה, מתקיים $f(x)>M$.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל x מתקיים $f(x)\leq M$ ובפרט לכל x חיובי מתקיים $f(0)\leq f(x)\leq M$ (כי f עולה). לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

כגבול של חסומה ($f(x)$) כפול $\frac{1}{x}$ ששואפת ל 0 (כאשר $x\to\infty$) ולכן גם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{f(0)}{x}=0-0=0$$

. מצד שני, לפי משפט לגרנז לכל $x>0$ קיים c כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$$

אבל $f'(0)>0$ ו f' עולה ולכן $f'(c)>f'(0)$ ולכן $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>f'(0)$ ולכן $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq$ $f'(0)>0$ סתירה.