# אנליזה 1 תשפ מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x+\sin(x))}{x+\sin(x)}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}\cdot\frac{x\,(x+\sin(x))}{(3x)^2}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

כאשר הגבול האחרון מחושב

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,(x+\sin(x))}{(3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\frac{(x+\sin(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right)=\frac{1}{9}\left(1+1\right)$$

(ב) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\left(e^{-x}\right)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}x^{\left(e^{-x}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(x^{\left(e^{-x}\right)}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{e^{-x}\ln(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left[e^{-x}\ln(x)\right]}$$

כעת נחשב

$$\lim_{x\to\infty}\left[e^{-x}\ln(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=0$$

ולכן הגבול בסה"כ שווה ל $e^0=1$.

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot 2^n}{n^n}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!\cdot 2^n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=2\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to 2\cdot 1\cdot e^{-1}$$

וכיוון ש $\frac{2}{e}<1$ נקבל ש $\lim a_n=0$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(|a+x|)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי $a$ הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = a$$

לכל $a$, מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \begin{cases} \text{לא מוגדר} & a < 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}, \text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 & a = 0 \\ \{\frac{\ln a}{0}\} = \pm\infty & a > 0 \end{cases}$$

ולכן רק עבור $a = 0$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי $a$ הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 0$ (שזה המקרה היחיד בו $f$ רציפה ב $x = 0$) אם $f$ גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(x)}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = \{\frac{-\infty}{0^+}\} = -\infty$$

כלומר $f$ אינה גזירה ב $x = 0$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2}$ וכן $a_1 = \frac{1}{2}$.

(א) הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < 1$.

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והוא קטן ממש מ 1.
- צעד - נניח נכונות עבור $n$, כלומר $a_n < 1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} < 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} < \frac{1^3 + 1}{2} = 1$$

כאשר אי השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה.

(ב) חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה כי לכל $n$ מתקיים $0 < a_n$:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והוא חיובי.

- צעד - נניח נכונות עבור $n$, כלומר $a_n$ חיובי. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1}$ חיובי. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} < \frac{1^3+1}{2} = 1$$

ומכיוון ש $a_n > 0$ (לפי הנחת האינדוקציה) וכפל/חילוק וחיבור של חיוביים הוא חיובי נקבל שגם $a_{n+1}$ חיובי.
כעת- טענה: הסדרה מונוטונית יורדת. הוכחה: לפי הגדרה $a_{n+1} = \frac{a_n^3+a_n}{2}$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3 + a_n}{2} - a_n = \frac{a_n^3 - a_n}{2} = a_n \left(\frac{a_n^2 - 1}{2}\right) = \frac{a_n\left(a_n+1\right)\left(a_n-1\right)}{2} < 0$$

שהרי $(a_n - 1)$ שלילי לפי סעיף קודם וכל שאר הגורמים חיוביים. כלומר, אכן קיבלנו שהסדרה מונוטונית יורדת.
כיוון שהסדרה חסומה ע"י $0$ יש לסדרה גבול סופי שנסמנו $L$. כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \to \frac{L^3 + L}{2}$$

כלומר $L = \frac{L^3+L}{2}$. נעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$0 = L\left(\frac{L^2+1}{2} - 1\right) = L\left(\frac{L^2-1}{2}\right) = L\frac{\left(L-1\right)\left(L+1\right)}{2}$$

ולכן $L \in \{0, 1, -1\}$. כיוון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והסדרה יורדת, האפשרות $L = 1$ נפסלת. בנוסף, ראינו שלכל $n$ מתקיים $0 < a_n$ ולכן $0 \leq L$ וזה פוסל את האפשרות $L = -1$. נשארנו עם אפשרות אחת שהיא $L = 0$.

4. קבעו לכל ערך $a \in \mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 - 3x = a$ (הפרידו למקרים).
פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x^3 - 3x - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של $a$, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3\left(x-1\right)\left(x+1\right)$$

ולכן, $\pm 1$ הן הנקודות היחידות בהן $f' = 0$ ונסתכל בטבלה

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

להסיק כי $f$ עולה ממש בקרן $(-\infty - 1)$ ובקרן $(1, \infty)$ויורדת ממש בקטע $(-1, 1)$ ולכן בכל אחד מהקטעים/קרנות הנ"ל $f$ יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר $x$ (כלומר שורש אחד לכל היותר). מתקיים כי

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 - a \\ f(1) &= -2 - a \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

(הגבולות נובעים מכך ש $f$ פולינום ממעלה אי זוגית, 3). ולכן:

- עבור $a<-2$ נקבל ש $f(-1)>0, f(1)>0$ ולכן ב $(-\infty-1]$ הפונקציה מחליפה סימן (לפי הגבול קיימת נקודה בקרן זו ב $f$ שלילית) ולא מתאפסת ב $-1$ ולכן חותכת פעם אחת בלבד את ציר $x$ כי בקרן זו $f$ רציפה + משפט ערך הביניים + חח"ע (חח"ע בגלל שעולה/יורדת ממש). בקטע $[-1,1]$ הפונקציה $f$ יורדת ובקרן $(1,\infty)$ עולה ומכיוון ש $f(1)>0$ נקבל שבקרן $(-1,\infty)$ אין חיתוך עם ציר $x$. לסיכום: במקרה זה יש שורש יחיד (בקרן $(-\infty,-1]$).
- עבור $a=-2$ נקבל ש $f(-1)>0, f(1)=0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $(-\infty,-1]$ ופעם יחידה בקרן $(-1,\infty)$ (בנקודה 1) ולכן סה"כ יהיו שני שורשים.
- עבור $-2<a<2$ נקבל ש $f(-1)>0, f(1)<0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $(-\infty,-1]$ ובאופן דומה תהיא נקודת חיתוך יחידה ב $[-1,1]$ (בקטע זה $f$מחליפה סימן ולא מתאפסת ב $\pm 1$) ובאופן דומה תהיה נקודת חיתוך יחידה ב $[1,\infty)$ (שהיא לא 1) ולכן בסה"כ יהיו 3 שורשים.
- עבור $a=2$נקבל ש $f(-1)=0, f(1)<0$ ובאופן דומה יהיו שני שורשים (אחד ב $-1$ ואחד בקרן $[1,\infty)$).
- עבור $a>2$ נקבל ש $f(-1)<0, f(1)<0$ ובאופן דומה יהיה שורש יחיד בקרן $[1,\infty)$.

5. תהיא $f$ פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת $f'$ היא פונקציה עולה אזי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
פתרון: הפרכה: $f(x)=2$ מקיימת כי $f'(x)=0$ עולה אבל $\lim_{x\to\infty} f(x)=2\neq\infty$

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת $f'$ היא פונקציה חיובית ועולה אזי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
פתרון: הוכחה: כיוון ש $f'>0$ חיובית נסיק ש $f$ עולה בכל $\mathbb{R}$. נוכיח $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ לפי ההגדרה. יהיה $M$ נתון ונראה שהחל ממקום מסוים $f(x)>M$. טענה: קיים $x_0$ המקיים $f(x_0)>M$ ואז החל ממנו, כיוון ש $f$ עולה, מתקיים $f(x)>M$.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל $x$ מתקיים $f(x)\leq M$ ובפרט לכל $x$ חיובי מתקיים $f(0)\leq f(x)\leq M$ (כי $f$ עולה). לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

כגבול של חסומה ($f(x)$) כפול $\frac{1}{x}$ ששואפת ל 0 (כאשר $x\to\infty$) ולכן גם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{f(0)}{x}=0-0=0$$

. מצד שני, לפי משפט לגרנז לכל $x>0$ קיים $c$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$$

אבל $f'(0)>0$ ו $f'$ עולה ולכן $f'(c)>f'(0)$ ולכן $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>f'(0)$ ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq f'(0)>0$$

סתירה.