

אנליזה 1 תשפ מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(x + \sin(x))}{1 - \cos(3x)} \quad (\text{א})$$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבולות ידועים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(x + \sin(x))}{1 - \cos(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x + \sin(x))}{x + \sin(x)} \cdot \frac{(3x)^2}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{x(x + \sin(x))}{(3x)^2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

כאשר הגבול האחרון מחושב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + \sin(x))}{(3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9} \frac{(x + \sin(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x} \right) = \frac{1}{9} (1 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(e^{-x})} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x^{(e^{-x})})} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{e^{-x} \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-x} \ln(x)]}$$

קעת נחשב

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-x} \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{e^x} \stackrel{\infty, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0$$

ולכן הגבול בסה"כ שווה ל $e^0 = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n} \quad (\text{ג})$$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n = \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$ ואז

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^{n+1} = 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot e^{-1} \end{aligned}$$

וכיוון ש $\frac{2}{e} < 1$ נקבל ש $\lim a_n = 0$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(a+x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?
פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = a$$

לכל a , מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \begin{cases} \text{לא מוגדר} & a < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\infty, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 & a = 0 \\ \left\{ \frac{\ln a}{0} \right\} = \pm \infty & a > 0 \end{cases}$$

ולכן רק עבור $a = 0$ מתקיים השוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?
פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 0$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x = 0$ אם f גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x)}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = \left\{ \frac{-\infty}{0^+} \right\} = -\infty$$

כלומר f אינה גזירה ב $x = 0$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2}$ וכן $a_1 = \frac{1}{2}$.

(א) הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < 1$.

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והוא קטן ממש מ 1.
- צעד - נניח נכונות עבור n , כלומר $a_n < 1$. נוכיח נכונות עבור $n + 1$, כלומר $a_{n+1} < 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} < \frac{1^3 + 1}{2} = 1$$

כאשר אי השוויון נובע מהנחת האינדוקציה.

(ב) חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים $0 < a_n$:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והוא חיובי.

• צעד - נניח נכונות עבור n , כלומר a_n חיובי. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר a_{n+1} חיובי. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} < \frac{1^3 + 1}{2} = 1$$

ומכיוון ש $a_n > 0$ (לפי הנחת האינדוקציה) וכפל/חילוק וחיבור של חיוביים הוא חיובי נקבל שגם a_{n+1} חיובי.

כעת- טענה: הסדרה מונוטונית יורדת. הוכחה: לפי הגדרה $a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2}$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3 + a_n}{2} - a_n = \frac{a_n^3 - a_n}{2} = a_n \left(\frac{a_n^2 - 1}{2} \right) = \frac{a_n (a_n + 1) (a_n - 1)}{2} < 0$$

שהרי $(a_n - 1)$ שלילי לפי סעיף קודם וכל שאר הגורמים חיוביים. כלומר, אכן קיבלנו שהסדרה מונוטונית יורדת. כיוון שהסדרה חסומה ע"י 0 יש לסדרה גבול סופי שנשמנו L . כלומר $a_n \rightarrow L$ ולכן גם $a_{n+1} \rightarrow L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \rightarrow \frac{L^3 + L}{2}$$

כלומר $L = \frac{L^3 + L}{2}$. נעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$0 = L \left(\frac{L^2 + 1}{2} - 1 \right) = L \left(\frac{L^2 - 1}{2} \right) = L \frac{(L-1)(L+1)}{2}$$

ולכן $L \in \{0, 1, -1\}$. כיוון ש $a_1 = \frac{1}{2}$ והסדרה יורדת, האפשרות $L = 1$ נפסלת. בנוסף, ראינו שלכל n מתקיים $0 < a_n$ ולכן $0 \leq L$ וזה פוסל את האפשרות $L = -1$. נשארו עם אפשרות אחת שהיא $L = 0$.

4. קבעו לכל ערך $a \in \mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 - 3x = a$ (הפרידו למקרים).
פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x^3 - 3x - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a , כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

ולכן, ± 1 הן הנקודות היחידות בהן $f' = 0$ ונסתכל בטבלה

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+

להסיק כי f עולה ממש בקרן $(-\infty, -1)$ ובקרן $(1, \infty)$ ויורדת ממש בקטע $(-1, 1)$ ולכן בכל אחד מהקטעים/קרנות הנ"ל f יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר). מתקיים כי

$$f(-1) = 2 - a$$

$$f(1) = -2 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(הגבולות נובעים מכך ש f פולינום ממעלה אי זוגית, 3). ולכן:

- עבור $a < -2$ נקבל ש $f(1) > 0, f(-1) > 0$ ולכן ב $[-1, -\infty)$ הפונקציה מחליפה סימן (לפי הגבול קיימת נקודה בקרן זו ב f שלילית) ולא מתאפסת ב -1 ולכן חותכת פעם אחת בלבד את ציר x כי בקרן זו f רציפה + משפט ערך הביניים + חח"ע (חח"ע בגלל שעולה/יורדת ממש). בקטע $[-1, 1]$ הפונקציה f יורדת ובקרן $(1, \infty)$ עולה ומכיוון ש $f(1) > 0$ נקבל שבקרן $(-1, \infty)$ אין חיתוך עם ציר x . לסיכום: במקרה זה יש שורש יחיד (בקרן $[-1, -\infty)$).
- עבור $a = -2$ נקבל ש $f(1) = 0, f(-1) > 0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $[-1, -\infty)$ ופעם יחידה בקרן $(-1, \infty)$ (בנקודה 1) ולכן סה"כ יהיו שני שורשים.
- עבור $-2 < a < 2$ נקבל ש $f(1) < 0, f(-1) > 0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $[-1, -\infty)$ ובאופן דומה תהיה נקודת חיתוך יחידה ב $[-1, 1]$ (בקטע זה f מחליפה סימן ולא מתאפסת ב ± 1) ובאופן דומה תהיה נקודת חיתוך יחידה ב $[1, \infty)$ (שהיא לא 1) ולכן בסה"כ יהיו 3 שורשים.
- עבור $a = 2$ נקבל ש $f(1) < 0, f(-1) = 0$ ובאופן דומה יהיו שני שורשים (אחד ב -1 ואחד בקרן $[1, \infty)$).
- עבור $a > 2$ נקבל ש $f(1) < 0, f(-1) < 0$ ובאופן דומה יהיה שורש יחיד בקרן $[1, \infty)$.

5. תהיה f פונקציה שגזירה בכל \mathbb{R} .

(א) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת f' היא פונקציה עולה אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

פתרון: הפרכה: $f(x) = 2$ מקיימת כי $f'(x) = 0$ עולה אבל $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \neq \infty$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת f' היא פונקציה חיובית ועולה אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

פתרון: הוכחה: כיוון ש $f' > 0$ חיובית נסיק ש f עולה בכל \mathbb{R} . נוכיח $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ לפי ההגדרה. יהיה M נתון ונראה שהחל ממקום מסוים $f(x) > M$. טענה: קיים x_0 המקיים $f(x_0) > M$ ואז החל ממנו, כיוון ש f עולה, מתקיים $f(x) > M$.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל x מתקיים $f(x) \leq M$ ובפרט לכל x חיובי מתקיים $f(0) \leq f(x) \leq M$ (כי f עולה). לכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

נגבול של חסומה $(f(x))$ כפול $\frac{1}{x}$ ששואפת ל 0 (כאשר $x \rightarrow \infty$) ולכן גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(0)}{x} = 0 - 0 = 0$$

. מצד שני, לפי משפט לגרנז לכל $x > 0$ קיים c כך ש

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

אבל $f'(0) > 0$ ו f' עולה ולכן $f'(c) > f'(0)$ ולכן $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > f'(0)$ ולכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq f'(0) > 0$$

סתירה.