

# תרגיל 3

להגשה עד 19.11.15

## שאלה 1

יהיו  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  מרחבים טופולוגיים. הוכיחו כי אם  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  רציפה אזי  $f$  פונקציה בורלית (כלומר, מדידה- $(\mathbb{B}(\mathbb{X}), \mathbb{B}(\mathbb{Y}))$ ).

## שאלה 2

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, באשר  $\mathbb{A} = \mathbb{P}(X)$ . מהן הפונקציות  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  המדידות- $\mathbb{A}$ ?

## שאלה 3

יהי  $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, נגדיר:  $\mu: \mathbb{A} \rightarrow [0, \infty]$  על ידי:

$$\mu(E) := \begin{cases} |E| & |E| < \infty \\ \infty & |E| \not< \infty \end{cases}$$

באשר  $|E|$  היא עוצמת  $E$ . הוכיחו כי:  $\mu$  מידה חיובית מעל מעל  $\mathbb{A}$ . (מידה זו נקראת מידת הספירה).

## שאלה 4

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ולכל  $i \in \{1, 2, 3\}$  תהי  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מדידה- $\mathbb{A}$ . לכל  $x \in X$ , נתבונן במשוואה:

$$g_x(t) := f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה ריבועית עם משתנה  $t$ . הוכיחו כי הקבוצה הבאה הינה מדידה- $\mathbb{A}$ :

$$\{x \in X : \exists t_1, t_2; t_1 \neq t_2 : g_x(t_1) = g_x(t_2) = 0\}$$

## שאלה 5 (רשות)

תהי  $X$  קבוצה  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$  אלגברה- $\sigma$  מעל  $X$ . הוכיחו כי

$$|\mathbb{A}| \neq \aleph_0$$

**בהנאה!!**