האינטגרל המסוים

תזכורת (האינטגרל המסוים לפי סכומי רימן)

יהי $[a,b]$ ותהי f פונקציה.

תהי $P := a = x_0 < \cdots < x_k = b$ חלוקה של $[a,b]$ ו - $d_1 \in [x_0, x_1], \cdots, d_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

נסמן: $\Delta_1 := x_1 - x_0, \cdots, \Delta_k := x_k - x_{k-1}$, ו - $\lambda(P) = \max\{\Delta_1, \cdots, \Delta_k\}$.

אז:

$$\boxed{\sigma(P) := \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot f(d_i) \xrightarrow[\lambda(P)\to 0]{} I := \int_a^b f(x)}$$

הסכומים של דרבו $(\boldsymbol{Darboux})$

הגדרה

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$.

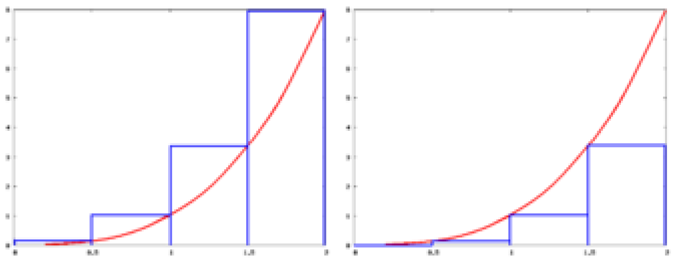
תהי $P := a = x_0 < \cdots < x_k = b$ חלוקה של $[a,b]$.

נגדיר לכל $1 \le i \le k$: $\alpha_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ו - $\beta_i := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

נגדיר:

$$\boxed{\overline{s}(P) := \sum_{i=i}^{k} \Delta_i \cdot \beta_i}$$

$$\boxed{\underline{s}(P) := \sum_{i=i}^{k} \Delta_i \cdot \alpha_i}$$



למה

תהי P חלוקה של $[a,b]$.

אזי:

$$\boxed{\begin{gathered}\underline{s}(P)=\inf\{\sigma(\tilde{P})\}\\ \bar{s}(P)=\sup\{\sigma(\tilde{P})\}\end{gathered}}$$

כאשר $\tilde{P}$ חלוקה מנוקדת המתקבלת מבחירת נקודות בקטעי החלוקה P.

הוכחה

תהי $\tilde{P}$ כנ"ל.

<u>טענה</u>: $\underline{s}(P)\le\sigma(\tilde{P})$.

<u>הוכחה</u>: לכל $1\le i\le k$: $\alpha_i=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}\le f(d_i)$, לכן:

$$\underline{s}(P)=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i\cdot\alpha_i\le\sum_{i=1}^{k}\Delta_i\cdot f(d_i)=\sigma(\tilde{P})$$

$\square$

לכן, הקבוצה $\{\sigma(\tilde{P})\}$ חסומה מלרע, לכן קיים לה אינפימום.

בנוסף:

$$\underline{s}(P)=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i\cdot\alpha_i\le\sigma(\tilde{P})$$

לכל $\tilde{P}$, לכן $\underline{s}(P)$ חסם מלרע.

נוכיח כי $\underline{s}(P)$ האינפימום.

יהי $0<\varepsilon$.

נרצה למצוא חלוקה מנוקדת $\tilde{P}$, כך ש: $\sigma(\tilde{P})<\underline{s}(P)+\varepsilon$.

נגדיר:

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{b-a}$$

אז:

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot (\alpha_i + \tilde{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \tilde{\varepsilon} = \underline{s}(P) + \tilde{\varepsilon} \cdot (b-a) = \underline{s}(P) + \varepsilon$$

עפ"י הגדרת האינפימום, לכל $1 \le i \le k$, קיים: $f(d_i) \in \{f(x): x \in [x_{i+1}, x_i]\}$ כך ש:

$$f(d_i) < \alpha_i + \tilde{\varepsilon}$$

נקבל חלוקה מנוקדת: $\tilde{P}: d_i \in [x_0, x_1], \cdots, d_k \in [x_{k-1}, x_k]$. אז:

$$\sigma(\tilde{P}) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot f(d_i) < \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot (\alpha_i + \tilde{\varepsilon}) = \underline{s}(P) + \varepsilon$$

לכן:

$$\underline{s}(P) = \inf\{\sigma(\tilde{P})\}$$

ההוכחה עבור $\bar{s}(P)$ באופן דומה.

■

הגדרה

חלוקה P_1 של $[a,b]$ היא **עידון** של חלוקה P_2 של $[a,b]$ אם $P_2 \subseteq P_1$.

למה

אם $\tilde{P}$ עידון של P, אז:

$$\boxed{\begin{array}{c} \bar{s}(P) \ge \bar{s}(\tilde{P}) \\ \bar{s}(P) \ge \bar{s}(\tilde{P}) \end{array}}$$

לכן, החסמים הופכים הדוקים יותר ככל שמעדנים את החלוקה.

הוכחה

נוכיח הטענה כאשר $\tilde{P}$ מתקבלת מ $-P$ ע״י הוספת נקודה אחת.

עידון כללי $\tilde{P} \subset P$ מתקבל מ $-P$ ע״י סדרה סופית של עידונים ע״י הוספת נקודה אחת בכל פעם.
עבור שוויון הטענה טריוויאלית.

תהי $P := x_0 < \cdots < x_k$ חלוקה של $[a,b]$.

נניח ש - $\tilde{P}$ חלוקה של $[a,b]$ המתקבלת מ $-P$ ע״י הוספת נקודה כלשהי y.

יהי$j \in \{1,\cdots,k\}$ כך ש: $x_{j-1} < y < x_j$.

נסמן:

$$\beta_{j,0} := \sup\{f(x): x_{j-1} \le x \le y\} \ ; \ \beta_{j,1} := \sup\{f(x): y \le x \le x_j\}$$

אזי:

$$\bar{s}(P) = \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + \Delta_j \cdot \beta_j$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) = \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + (y - x_{j-1}) \cdot \overbrace{\beta_{j,0}}^{\le \beta_j} + (x_j - y) \cdot \overbrace{\beta_{j,1}}^{\le \beta_j}$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) \le \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + (y - x_{j-1} + x_j - y) \cdot \beta_j$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) \le \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + \Delta_j \cdot \beta_j$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) \le \bar{s}(P)$$

ההוכחה עבור $\underline{s}(P)$ באופן דומה.

■

למה

אם $\tilde{P}$ חלוקה של $[a,b]$ מתקבלת מחלוקה P של $[a,b]$ ע״י הוספת m נקודות, אז:

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{s}(P) \leq \bar{s}(\tilde{P}) + m \cdot \lambda(P) \cdot \omega \\ \bar{s}(P) \leq \bar{s}(\tilde{P}) + m \cdot \lambda(P) \cdot \omega\end{array}}$$

כאשר:

$$\omega \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על m.

<u>בסיס</u>: $m = 1$.

בסימוני ההוכחה הקודמת:

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) = \overbrace{\Delta_j}^{x_j-y+y-x_{j-1}} \cdot \beta_j - (y - x_{j-1}) \cdot \beta_{j,0} - (x_j - y) \cdot \beta_{j,1}$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) = (y - x_{j-1}) \cdot \overbrace{(\beta_j - \beta_{j,0})}^{\leq \beta_j - \alpha_j \leq \omega} + (x_j - y) \cdot \overbrace{(\beta_j - \beta_{j,1})}^{\leq \beta_j - \alpha_j \leq \omega}$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq (y - x_{j-1}) \cdot \omega + (x_j - y) \cdot \omega$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq \overbrace{(x_j - x_{j-1})}^{=\Delta_j} \cdot \omega$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq \lambda(P) \cdot \omega$$

<u>צעד</u>: $m > 1$.

נניח כי $\tilde{P}$ מתקבלת מ – P ע״י הוספת m נקודות.

תהי $P \subseteq \tilde{\tilde{P}} \subseteq \tilde{P}$ כך ש: $\left|\tilde{P} \backslash \tilde{\tilde{P}}\right| = 1$, $\left|\tilde{\tilde{P}} \backslash P\right| = m - 1$.

עפ״י הנחת האינדוקציה:

$$\bar{s}(P) - \bar{s}\left(\tilde{\tilde{P}}\right) \leq (m-1) \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

$$\bar{s}\left(\tilde{\tilde{P}}\right) - \bar{s}\left(\tilde{P}\right) \le 1 \cdot \lambda\left(\tilde{\tilde{P}}\right) \cdot \omega \le 1 \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}\left(\tilde{P}\right) \le m \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

$$\blacksquare$$

הערה

לכל שתי חלוקות $P, \tilde{P}$ של $[a, b]$, מתקיים:

$$\boxed{\underline{s}(P) \le \bar{s}\left(\tilde{P}\right)}$$

הוכחה

החלוקה $P \cup \tilde{P}$ של $[a, b]$ מעדנת את P ואת $\tilde{P}$.

לכן:

$$\underline{s}(P) \le \underline{s}\left(P \cup \tilde{P}\right) \le \bar{s}\left(P \cup \tilde{P}\right) \le \bar{s}\left(\tilde{P}\right)$$

$$\blacksquare$$

הערה

נסמן $\alpha \coloneqq \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ו - $\beta \coloneqq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

אזי:

$$\alpha \cdot (b-a) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \alpha \le \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \alpha_i = \underline{s}(P) \le \bar{s}(P) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \beta_i \le \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \beta = \beta \cdot (b-a)$$

בפרט, הקבוצות $\{\bar{s}(P)\}$ ו - $\{\underline{s}(P)\}$ חסומות.

הגדרה

בהמשך לסימונים הנ"ל, נגדיר:

$$\boxed{\underline{I} \coloneqq \inf\{\underline{s}(P)\}}$$

$$\boxed{\bar{I} \coloneqq \sup\{\bar{s}(P)\}}$$

$\underline{I} =$ **האינטגרל התחתון של דרבו**.

$\bar{I} =$ **האינטגרל העליון של דרבו**.

כיוון ש: $\underline{s}(P) \leq \bar{s}(\tilde{P})$, אז: $\underline{I} \leq \underline{s}(P) \leq \bar{I}$, לכן: $\underline{I} \leq \bar{I}$.

■