

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 2: תנע קווי, עבודה ואנרגיה

1. חלקיק בעל מסה m_1 מתנגש אלסטית בחלקיק בעל מסה m_2 . החלקיק m_2 נמצא תחילה במצב מנוחה במערכת היחוס של המעבדה. לאחר ההתנגשות מוסט המסלול של m_1 בזווית θ_1 מן הכוון ההתחלתי שלו.

(א) הראו כי $\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2}$ כאשר θ זווית ההסט במערכת מרכז המסה. נסמן את המהירות של m_1 במעבדה ובמרכז המסה, לאחר ההתנגשות ב \vec{u}_1 ו u'_1 בהתאמה. תהי \vec{v}_{cm} מהירות מרכז המסה. אזי, מחיבור מהירויות נקבל ולכן $\vec{u}_1 = \vec{u}'_1 + \vec{v}_{cm}$

$$\tan \theta_1 = \frac{u'_1 \sin \theta}{u'_1 \cos \theta + v_{cm}}$$

משימור אנרגיה (במערכת מרכז המסה) נובע

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

כאשר \vec{v}_1' ו \vec{v}_2' המהירויות לפני ההתנגשות (במערכת מרכז המסה) של m_1 ו m_2 בהתאמה ו \vec{u}_2' המהירות לאחר ההתנגשות (במערכת מרכז המסה) של m_2 מאחר ובמרכז המסה התנע הכולל תמיד אפס, כלומר, $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0$ וגם $m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = 0$ נקבל, לאחר הצבה במשוואת שימור האנרגיה כי $u_1' = v_1'$ כלומר, גודל המהירות במרכז המסה, לפני ואחרי ההתנגשות, נשמר. נשים לב גם כי, אם \vec{v} המהירות של המסה הפוגעת (במעבדה) אז מחיבור מהירויות נקבל $\vec{v}_1' = \vec{v} - \vec{v}_{cm}$ ו $\vec{v}_2' = -\vec{v}_{cm}$. אם כן, $\vec{v}_1' - \vec{v}_2' = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{v}_1' = \vec{v} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{v}_{cm}$ כאשר השוויון האחרון נובע מכך שמהירות מרכז המסה נתונה ע"י $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$ מכאן ש

$$\vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1} \vec{v}_{cm}$$

ולכן

$$v'_1 = u'_1 = \frac{m_2}{m_1} v_{cm}$$

נציב את הקשר האחרון במשוואה הקושרת בין הכוון במעבדה $\tan \theta_1$ לכוון במרכז המסה $\tan \theta$ ונקבל

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2}$$

כנדרש.

(ב) הראו כי הערך המקסימלי של זווית הפיזור θ_1 במערכת המעבדה נתון ע"י

$$\tan \theta_1 = A/\sqrt{1-A^2} \text{ כאשר } A = m_2/m_1$$

נציב $x = \cos \theta$ ונקבל

$$\tan \theta_1 = f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x + m_1/m_2}$$

נזור, נשווה לאפס, נציב $x_0 = -m_2/m_1 = -A$ ונקבל $\max_{\theta_1} \tan \theta_1 = f(x_0) = A/\sqrt{1-A^2}$ כנדרש.

(ג) בניסוי נמצא, שלחיקי α (אטומי הליום ללא אלקטרונים) העוברים דרך גז של אטומי מימן יש סטיה מקסימלית של 15° (במערכת המעבדה). העריכו את המסה של חלקיק α יחסית לאטום המימן

$$m_\alpha = m_H/A \simeq \text{ולכן } A = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 15}} \simeq 0.96 \text{ ולכן } \tan 15 \simeq 0.27$$

$1.04m_H$

2. מרכז המסה של התפלגות $\rho(\vec{r})$ נתון ע"י $\vec{r}_{cm} = \frac{\int d^d r \vec{r} \rho(\vec{r})}{\int d^d r \rho(\vec{r})}$. מצאו את מרכז המסה עבור ההתפלגות $\rho(x, y) = \frac{1}{(2-x)^2}$ $x=0, y=0, y=1-x$ הקוים ע"י

$$m = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2} \int_0^{1-x} dy = \ln 2 - \frac{1}{6}$$

ולכן

$$\vec{r}_{cm} = \left(\frac{\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x)^2} \int_0^{1-x} dy}{m}, \frac{\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2} \int_0^{1-x} y dy}{m} \right) = \left(\frac{\ln 8 - 2}{\ln 2 - \frac{1}{6}}, \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln 4 \right)}{\ln 2 - \frac{1}{6}} \right)$$

3. גוף נע בשדה $\mathbf{F} = (x^3 + xy^2, y^3 + yx^2)$ במישור $x - y$.

(א) הוכיחו כי השדה משמר (רמז: השתמשו במשפט סטוקס)

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

נסמן $\vec{F} = (F_x, F_y)$ ונקבל

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z} = (2xy - 2xy) \hat{z} = 0$$

ולכן השדה משמר בכל תחום ב \mathbb{R}^2

(ב) מצאו ע"י אינטגרציה של רכיבי השדה \mathbf{F} פונקציה פוטנציאל

$$V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$$

הפוטנציאל מקיים $V = -\nabla \vec{F}$ ולכן

$$V = - \int (x^3 + xy^2) dx + f(y) = - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 \right) + f(y).$$

כעת

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2y + f'(y) = -(y^3 + x^2y)$$

ונקבל

$$f(y) = -\frac{1}{4}y^4$$

והפוטנציאל המבוקש הוא

$$V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$$

(ג) חשבו בצורה מפורשת את העבודה הדרושה להעביר את הגוף מהראשית

לנקודה $(2, 1)$ לאורך מסלול המחבר תחילה את הראשית עם הנקודה $(2, 0)$

לאורך ציר x ולאחר מכן את הנקודה $(2, 0)$ עם הנקודה $(2, 1)$ לאורך ציר y

$$W = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^2 x^3 dx - \int_0^1 (4y + y^3) dy = -\frac{25}{4}$$

(ד) חזרו על החישוב מסעיף 3ג ע"י שמוש בפוטנציאל מאחר והכח משמר נקבל

$$W = V(1, 2) - V(0, 0) = -2 - \frac{1}{4}(1 + 16) = -\frac{25}{4}$$

(ה) כתבו את הכח במערכת צירים פולרית. האם הכח מרכזי? נשתמש בטרנספורמציה $\hat{x} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$ ונרשום

$$\vec{F} = r^3(\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta)(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) +$$

$$+ r^3(\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta)(\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta) = r^3 \hat{r}$$

וקיבלנו כמובן כח מרכזי.

4. חרוז מחליק על מסילה חסרת חיכוך אשר גובהה y נתון ע"י הפונקציה $y = f(x)$. ידוע כי בנקודה $(x, y) = (0, 0)$ המסילה אנכית והחרוז עובר בנקודה זו עם מהירות אנכית $-V$ (מטה). הראו כי על מנת שהמהירות בכיוון האנכי תהיה קבועה ושווה ל

$$y = f(x) = -\frac{(3gVx)^{2/3}}{2g} \quad \text{ע"י } -V, \quad \text{צורת המסילה נתונה ע"י}$$

משימור אנרגיה נקבל

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mV^2,$$

ולכן המהירות נתונה ע"י

$$v = \sqrt{V^2 - 2gy}.$$

רכיב המהירות האנכי הוא $\dot{y} = v \sin \theta$ ושיפוע המסילה נתון ע"י $y' = \tan \theta = \frac{dy}{dx}$ לכן

$$\sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

ומהדרישה $\dot{y} = -V$ נקבל

$$\sqrt{V^2 - 2gy} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -V.$$

נעלה בריבוע ונקבל את המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V}{\sqrt{-2gy}}$$

(בחרנו מינוס משום ש y מונוטונית יורדת). מאינטגרציה על

$$\int \sqrt{-2gy} dy = -V \int dx,$$

כאשר קבוע האינטגרציה הוא אפס מתנאי השפה $y(0) = 0$, נקבל את המסילה המבוקשת.