הרצאה 24

נכתב על ידי יהונתן רגב

הערה

יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי B בסיס אורתונורמלי עבור V.

$$[T]_B = A \Rightarrow [T^*]_B = A^* = \overline{A^t}$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר אופרטור $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ע״י $T(x) = A \cdot x$.

נבחר בסיס B_0, $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (בסיס סטנדרטי) עבור $\mathbb{F}^n$. אזי $[T]_{B_0} = A$.

B_0 בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{F}^n$, לכן $[T^*]_{B_0} = A^*$, עובדה המאפשרת לתרגם תכונות של T ללשון של מטריצות.

תבניות דו לינאריות וריבועיות

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב ווקטורי מעל שדה כלשהו $\mathbb{F}$.

הגדרה

אומרים ש - $\varphi: V \times V \to \mathbb{F}$ היא **תבנית דו לינארית** אם :

1. $\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2, w) = \alpha_1 \cdot \varphi(v_1, w) + \alpha_2 \cdot \varphi(v_2, w)$.
2. $\varphi(v, \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2) = \beta_1 \cdot \varphi(v, w_1) + \beta_2 \cdot \varphi(v, w_2)$.

דוגמאות

1. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\varphi(v, w) = < v, w >$.
2. $V = M_n(\mathbb{F})$, $\varphi(A \cdot B) = tr(A \cdot B)$.
3. $V = \mathbb{F}^2$ (מרחב שורות מאורך 2), $\varphi(v, w) = det\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$.

נשים לב כי בדוגמאות 1,2 התבניות סימטריות $\big(\varphi(v, w) = \varphi(w, v)\big)$, ובדוגמה 3 התבנית אנטי סימטרית $\big(\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)\big)$.

הגדרה

תהי φ תבנית דו לינארית. יהי $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ בסיס עבור V.

נגדיר :

$$G_B = \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \cdots & \varphi(v_1, v_n) \\ \varphi(v_2, v_1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varphi(v_n, v_1) & \cdots & \cdots & \varphi(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

G נקראת **מטריצת גראם** המתאימה ל - B.

משפט

אם B' בסיס נוסף עבור V, P מטריצת המעבר בין הבסיסים B ו - B', אזי :

$$G_{B'} = P^t \cdot G_B \cdot P$$

תרגיל

הוכיחו!

הגדרה

תהי φ תבנית דו ליניארית.

נגדיר $Ker(\varphi) = \{y \in V \mid \forall x \in V: \varphi(x, y) = 0\}$. $Ker(\varphi)$ נקרא הגרעין של φ.

אם $Ker(\varphi) = \{0\}$, אומרים ש - φ **תבנית לא מנונת**.

הערה

אם $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ בסיס עבור V, אזי:

$$(*)\ Ker(\varphi) = \{y \in V \mid \forall 1 \le i \le n : \varphi(v_i, y) = 0\}$$

דוגמאות

1. $Ker(\varphi) = V^{\perp} = \{0\}$.

2,3. **תרגיל**!

הערה

(*) זו מערכת משוואות הומוגניות יחסית לרכיבים של y (n נעלמים) עם המטריצה G_B.

לכן:

$$dim\big(Ker(\varphi)\big) = n - rank(G_B)$$

הוכחה

$$y = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{i = 1}}$$

$$\varphi(v_1, \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n) = 0$$

$$\beta_1 \cdot \overbrace{\varphi(v_1, v_1)}^{g_{11}} + \cdots + \beta_n \cdot \overbrace{\varphi(v_1, v_n)}^{g_{1n}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\underline{\boldsymbol{i = n}}$$

$$\varphi(v_n, \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n) = 0$$

$$\beta_1 \cdot \overbrace{\varphi(v_n, v_1)}^{g_{n1}} + \cdots + \beta_n \cdot \overbrace{\varphi(v_n, v_n)}^{g_{nn}} = 0$$

■

הערה

אם B' בסיס נוסף, אזי עפ"י הערה קודמת $G_{B'} = P^t \cdot G_B \cdot P$, לכן $rank(G_{B'}) = rank(G_B)$.

מכאן, $dim\big(Ker(\varphi)\big)$ אינו תלוי בבחירת בסיס.

לכן, נגדיר: $\boldsymbol{rank(\varphi) = rank(G)}$.

דוגמאות

$$\varphi: \mathbb{F}^2 \times \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$$

$$B = \{(0\ 1), (1\ 0)\}$$

$$G_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה

אומרים ש - φ **סימטרית** אם לכל $v, w \in V$: $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$.

אומרים ש - φ **אנטי סימטרית** אם לכל $v, w \in V$: $\varphi(v,w) = -\varphi(w,v)$.

הגדרה

נניח ש - $char(\mathbb{F}) \neq 2$, ז"א, $1 + 1 \neq 0$, ותהי φ תבנית דו לינארית <u>סימטרית</u>.

נגדיר $q: V \to \mathbb{F}$ ע"י הנוסחה הבאה: $q(v) = \varphi(v,v)$.

קוראים ל $- q$ **תבנית ריבועית** המתאימה ל $- \varphi$.

הערה

אם נשתמש בקואורדינטות יחסית לבסיס B, נקבל:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

הוכחה

$$q(v)=\varphi(v,v)$$

$$q(v)=\varphi(x_1\cdot v_1+\cdots+x_n\cdot v_n,x_1\cdot v_1+\cdots+x_n\cdot v_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overbrace{\varphi(v_i,v_j)}^{g_{ij}}\cdot x_i\cdot x_j$$

$\blacksquare$

זהות פולארית

אם נתון q, ניתן לשחזר φ :

$$\varphi(v,w)=\frac{1}{2}\cdot\big(q(v+w)-q(v)-q(w)\big)$$

הוכחה

$$q(v+w)-q(v)-q(w)=\varphi(v+w,v+w)-\varphi(v,v)-\varphi(w,w)$$

$$q(v+w)-q(v)-q(w)=\varphi(v,v)+\varphi(v,w)+\overbrace{\varphi(w,v)}^{=\varphi(v,w)}+\varphi(w,w)-\varphi(v,v)-\varphi(w,w)$$

$$q(v+w)-q(v)-q(w)=2\cdot\varphi(v,w)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(v,w)=\frac{1}{2}\cdot\big(q(v+w)-q(v)-q(w)\big)$$

$\blacksquare$

הגדרה

תהי φ תבנית דו ליניארית סימטרית או אנטי סימטרית.

אומרים ש- $x\perp y$ אם $\varphi(x,y)=0$.

תרגיל

הוכיחו שאם φ אנטי סימטרית, אזי : $\varphi(x,x)=0$.

הגדרה

יהי $U\subseteq V$ תת מרחב ווקטורי.

נגדיר $U^{\perp}=\{y\in V\mid \forall x\in U:\ \varphi(x,y)=0\}$.

הערה

$$U^{\perp} = Ker(\varphi)$$

ניתן לקבל עפ"י ההגדרה של $Ker(\varphi)$ ו - $U^{\perp}$.

משפט

נניח $Ker(\varphi) = \{0\}$. אזי:

1. $dim(U^{\perp}) = dim(V) - dim(U)$.
2. $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

הוכחה

1. נבחר בסיס $B = \{v_1, \cdots, v_k\}$ עבור U.

$$U^{\perp} = \{y \in V \mid \forall 1 \le i \le k : \ \varphi(v_i, y) = 0\}$$

זוהי מערכת של k משוואות ב $n -$ נעלמים, שהם הרכיבים של y ביחס לבסיס B.

k המשוואות הן בלתי תלויות לינארית (**תרגיל:** בדוק! השתמש בהנחה $Ker(\varphi) = \{0\}$).

לכן: $dim(U^{\perp}) = n - k$.

2. $dim((U^{\perp})^{\perp}) = dim(V) - dim(U^{\perp}) = dim(V) - (dim(V) - dim(U)) = dim(U)$

נותר להוכיח: $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$.

יהי $x \in U$, נוכיח: $x \in (U^{\perp})^{\perp}$.

$$x \in (U^{\perp})^{\perp} \Leftrightarrow \forall \mathrm{z} \in \mathrm{U}^{\perp} : \ \varphi(z, x) = 0$$

וזה נכון, לפי ההגדרה.

■

משפט (פירוק ניצב)

אם: $Ker(\varphi|_U) = \{0\}$. אז: $V = U \oplus U^{\perp}$.

להפך, אם: $V = U \oplus U^{\perp}$, אז: $Ker(\varphi|_U) = \{0\}$.

הוכחה

באופן כללי: $dim(U^{\perp}) \geq n-k$ (תכונה של מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית בת k משוואות ב - n נעלמים).

בנוסף: $U \cap U^{\perp} = Ker(\varphi|_U)$ (**תרגיל:** בדוק!)

אם: $\boldsymbol{V = U \oplus U^{\perp}}$, אז: $U \cap U^{\perp} = \{0\}$, לכן: $\boldsymbol{Ker(\varphi|_U) = \{0\}}$.

אם: $\boldsymbol{Ker(\varphi|_U) = \{0\}}$, אזי: $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. עפ״י משפט הממדים:

$$dim(U + U^{\perp}) = dim(U) + dim(U^{\perp}) - dim(U \cap U^{\perp}) = k + (n-k) - 0 = n$$

$$dim(U + U^{\perp}) = dim(V)$$

לכן: $V = U + U^{\perp}$, ומפני ש - $U \cap U^{\perp} = \{0\}$, אז: $\boldsymbol{V = U \oplus U^{\perp}}$.

■