

אתר הקורס - <http://u.cs.biu.ac.il/~89-919/>

נוסחת בייס Bayes

מטרה: חישוב $P(E|F)$ כשקל יותר לחשב $P(F|E)$

לפי הגדרת הסתברות מותנית: $P(EF) = P(E|F)P(F) = P(E|F)P(E)$

הצורה הבסיסית

$$P(E|F) = \frac{P(E|F)P(E)}{P(F)}$$

$$P(F) = P(EF) + P(\overline{E}F) = P(F|E)P(E) + P(F|\overline{E})P(\overline{E})$$

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|\overline{E})P(\overline{E})}$$

הנוסחה הכללית

בהינתן קבוצת מאורעות זרים E_1, E_2, \dots, E_n שפורשים את S $\bigcup_{i=1}^n E_i = S$ נקבל:

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(FE_i) = \sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)$$

נציב בנוסחת בייס:

$$P(E_i|F) = \frac{P(F|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^n P(F|E_j)P(E_j)}$$

דוגמה

מכתב נמצא באחת מתוך 3 תיקיות, בהסתברות שווה. כשמחפשים את המכתב בתיקיה שבה הוא נמצא ההסתברות למצוא אותו היא α . מה הסיכוי שהמכתב בכל זאת נמצא בתיקיה הראשונה למרות שסרקנו אותה ולא מצאנו את המכתב?

נסמן: E_i המכתב בתיקיה i .
 F סרקנו את התיקיה הראשונה ולא מצאנו את המכתב

$$P(E_1|F) = \frac{P(F|E_1)P(E_1)}{\sum_{i=1}^3 P(F|E_i)P(E_i)} = \frac{(1-\alpha)\frac{1}{3}}{(1-\alpha)\frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1-\alpha}{3-\alpha}$$

משתנים מקריים

מוטיבציה: פעמים רבות לא מתעניינים ישירות בתוצאת הניסוי, אלא בפונקציה שלה.

$$P\left(\sum f((d_1, d_2)) = 7\right) \text{ :למשל: מה סכום הטלת זוג קוביות.}$$

לפונקציה כזו נקרא משתנה מקרי:

הגדרה: משתנה מקרי (מ"מ)

פונקציה ממרחב המדגם לערך כלשהו (מטווח מוגדר של הפונקציה).

נסמן: X המשתנה המקרי
 $x \in X$ ערך אפשרי של המ"מ

נשים \heartsuit : מאחר שהערך x של X נקבע על פי תוצאות הניסוי, ניתן לייחס לו הסתברות: סכום ההסתברויות של כל תוצאות הניסוי שעבורן ערך הפונקציה הוא x .

נסמן¹:

$$P(x) = P(X = x)$$

בדוגמת זוג הקוביות:

$$P(7) = \frac{6}{36} \quad P(2) = P(12) = \frac{1}{36}$$

טווח הפונקציה הוא $\{2, \dots, 12\}$. כל זוג מאורעות עבורם ערך הפונקציה שונה הם זרים (כי זו פונקציה ולכן היא חד ערכית). לכן:

$$P\left\{\bigcup_{i=2}^{12} \{X = i\}\right\} = \sum_{i=2}^{12} P(\{X = i\}) = \sum_{i=2}^{12} P(i) = 1$$

באופן כללי:

סכום ההסתברויות לכל הערכים האפשריים של משתנה מקרי הוא 1

הגדרה - משתנה מקרי בדיד ורציף

משתנה מקרי בדיד: סט הערכים האפשריים סופי או בר מנייה (כגון $1, 2, \dots, \infty$)

משתנה מקרי רציף: המשתנה יכול לקבל טווח רציף של ערכים (כגון מספר ממשי). לדוגמה: גובה של אדם

למשתנה בדיד קיימת פונקציית הסתברות $p(x)$ שמגדירה ערך הסתברותי לכל ערך אפשרי של X . נקראת פונקציית מסת ההסתברות (Probability Mass Function)

לקבוצת ההסתברויות שמגדירה את הפונקציה $p(x)$: $\{p(x_i)\}$ נקרא הפרמטרים של התפלגות X

¹למשתנה בדיד. עבור משתנים רציפים ההסתברות של ערך בודד (או של כל קבוצה בת מנייה של ערכים בודדים) היא 0

הגדרה - מ"מ ברנולי

מ"מ ברנולי מוגדר עבור ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות. נגדיר פונקציית מ"מ:

• לתוצאה אחת נקרא הצלחה ועבורה $X = 1$

• לתוצאה שנייה נקרא כישלון ועבורה $X = 0$

$$\text{נסמן: } p(1) = p \quad p(0) = 1 - p$$

הגדרה - מ"מ בינומי

מ"מ בינומי מוגדר עבור ניסוי של סדרה של n ניסויי ברנולי. ערך המ"מ X - מספר הצלחות (1-ים) בניסוי ההסתברות לערך מסויים של X (מתוך הטווח $0, \dots, n$): נוסחת הבינום:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

הגדרה - תוחלת של מ"מ (Expected Value)

אינטואיטיבית: ממוצע משוקלל של ערכי X , משוקללים בהסתברויות שלהם:

$$E[X] = \sum_{\substack{x \in X \\ x:p(x)>0}} x \cdot p(x)$$

דוגמאות: מ"מ של הטלת קוביה בודדת:

$$E[X] = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{6 \text{ times}} = 3.5$$

מ"מ של סכום זוג קוביות:

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 7 \cdot \frac{6}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

משתנה ברנולי:

$$E[X] = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$$

משתנה בינומי:

$$E[X] = \sum_{i=0}^n i \cdot p(i) = \sum_{i=0}^n i \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n \cdot p$$

הגדרה - תוחלת של פונקציה ($g(x)$) על מ"מ

לדוגמה: X - הטלת קוביה, $g(x) = x^2$

נסתכל על $g(X)$ כמשתנה מקרי חדש, שבו ההסתברות לכל ערך $g(x)$ היא $p(x)$, ולכן:

$$E[g(x)] = \sum_{x \in X} g(x) \cdot p_X(x)$$

למשל - הגדרת שונות:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

הגדרה - התפלגות משותפת של מ"מ

מוטיבציה: מידול תופעה שעבורה מחושבים מספר משתנים מקריים בניסוי, ומתעניינים בהסתברות של צירוף ערכים מסויים (כל צירוף אפשרי).

הסתברות משותפת למשתנים X, Y מגדירה ערך הסתברות לכל זוג אפשרי של ערכים $x \in X, y \in Y$:

$$p(x, y) = P(\{X = x, Y = y\})$$