פתרונות (1)

1. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$.

פתרון: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי

$\sigma(\mathfrak{A}_2) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathfrak{A}_2$ מוכלת ב $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, כלומר - $\sigma(\mathfrak{A}_2) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$.

$\sigma(\mathfrak{A}_2) \supseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$: נובע מכך ש $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$.

2. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{E}$ כך ש $A \in \sigma(\mathfrak{D})$.

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש.

פתרון:

א. נסמן ב S קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי S הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E \in \mathcal{E}$, ברור כי $X \in \sigma(E)$ ומכאן ש $X \in S$.

ii. אם $A \in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n \in \mathcal{E}$ וגם $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ מכאן ש $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ ולכן $A^c \in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\{E_n^k\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma(E_k^n, k \in \mathbb{N})$. קל לראות כי אז $\{E_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(E_k^n, n, k \in \mathbb{N})$ ולכן $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma(E)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma(E) \subseteq S$ וסיימנו.

3. לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו $a,b\in\mathbb{R}$ מגדירים $aE+b:=\{ax+b: x\in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x\mapsto ax+b$). הוכיחו: $m^*(aE+b)=|a|m^*(E)$.

פתרון: הזזה ראיתם בהרצאה. לכן נראה רק את המקרה $m^*(aE)=|a|m^*(E)$.

המקרה בו $a=0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE=0$. נוכיח ל $a\neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE.

הוכחה:

$\Leftarrow$ הפונקציה : $x\mapsto ax$ ולכן (ההופכית שלה רציפה) פתוחה aO קבוצה פתוחה. מצד שני $aO=a(E\cap O)\cup(O/E)=a(E\cup(O/E))=aE\cup a(O/E)$ ומכאן , $aE\subseteq aO$ ולכן. aO כיסוי פתוח של aE.

$\Rightarrow$ באותו אופן ע"י : $x\mapsto \frac{1}{a}x$. מש"ל .

כעת, נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} aI_n=a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$ ומכאן ש

$$
\begin{aligned}
m^*(aE)&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid aE\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(aI_n) \mid E\subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} aI_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |a| l(I_n) \mid E\subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=|a|\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E\subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=|a|\mathrm{m}^*(E)
\end{aligned}
$$

מש"ל.

4. הגדרה: נאמר שקבוצה $G\subseteq\mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G\in G_\delta$ המקיימת $E\subseteq G$ וכן $m^*(G)=m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E\subseteq O$ וכן

$$m^*(O)<m^*(E)+\varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

פתרון: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$. מכיוון $m^*(O)<m^*(E)+\varepsilon$ כך ש O. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה E שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את . מכאן שאם נסמן $\sum_{k=1}^{\infty}l(I_k)<m^*(E)+\varepsilon$ כך ש E המכסים את $\{I_k\}$ נקבל כי קיימים קטעים . נבנה $m^*(O)\le\sum_{k=1}^{\infty}l(I_k)<m^*(E)+\varepsilon$ הינה קבוצה פתוחה המקיימת O , נקבל כי $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k=O$. זוהי קבוצה ב $O=\bigcap_{m=1}^{\infty}O_m$. נסמן $m^*(O'_m)<m^*(E)+\frac{1}{m}$ כך ש $\{O'_m\}$ סדרה של קבוצות פתוחות G_δ . מהמונוטוניות של המידה נקבל

. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון. $\forall m\in\mathbb{N}$ $m^*(E)\le m^*(O)=m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}O_m\right)<m^*(E)+\frac{1}{m}$

5. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.

ב. אם $m(A_n)>\delta>0$ לכל n, הראו כי $m(B)>\delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(B)=0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ אבל $m(B)=0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ וגם מתקיים כי $m(E_1) \le 1$ שכן $E_1 \subseteq [0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} m(A_k) \ge \delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ נובע כי $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$. מהסעיף הקודם נובע כי $m(B) \le \lim_{k\to\infty} m(A_k)$ ומכאן ש $m(B) = 0$.

ד. ניקח את $A_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$. קל לראות כי $m(A_n) = \frac{1}{(n+1)}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$. מצד שני $E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n = A_k$ ולכן

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

6. יהי $\varepsilon > 0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב $\mathbb{R}$. הוכח כי אם מתקיים

$$m(A \cap I) \le (1-\varepsilon) m(I)$$

לכל אינטרוול I אזי $m(A) = 0$.

פתרון: נניח תחילה כי $m(A) < \infty$. אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית m^* (שמסכימה עם m לכל קבוצה מדידה בורל) קיימת קבוצה פתוחה O כך ש $A \subset O$ ו $m(O) < \infty$. ניתן לרשום $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים זרים ופתוחים. נקבל כי

$$m(A \cap O) = m\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon) m(A \cap I_n) = (1-\varepsilon) m(A \cap O)$$

מכאן נובע כי $m(A \cap O) = 0$ ולכן $m(A) = 0$.

עבור המקרה בו $m(A) = \infty$ נתסתכל על $A_i = A \cap [i-1, i]$ עבור $i \in \mathbb{Z}$. ברור כי מתקיים

$$m(A_i \cap I) \le m(A \cap I) \le (1-\varepsilon) m(I)$$

לכל אינטוול I.עפ"י המקרה הקודם נובע כי $m(A_i)=0$. מכאן ש

$$m(A)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap[i-1,i]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=0$$

מש"ל

7. יהי ה (X,S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקצית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית וכך ש $\mu(\varnothing)=0$.
נניח שאם A_n הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$. הראו כי μ הינה מידה.

פתרון: מספיק להראות שאם $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_n E_n\right)=\sum_n \mu(E_n)$

נגדיר סדרה חדשה $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$. זוהי סדרה עולה , ומתוך האדיטיביות הסופית (סיגמא – אדיטיביות).

ולכן $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$. מתקיים גם ש $\mu(F_n)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$ נובע כי μ של

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

8. נניח ו $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X,S) ו $\mu_n(A)\uparrow$ לכל $A\in S$ אזי $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ברור כי $\mu(A)\geq 0$ לכל $A\in S$ וכי $\mu(\varnothing)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(\varnothing)=0$. נראה כי גם התכונה השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\mu_j\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_j(A_n)$$

נסמן את הסכומים החלקיים $c_{ij}=\sum_{n=1}^{i}\mu_j(A_n)$. מתקיים

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_j\left(A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}c_{ij}=\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{i\in\mathbb{N}}c_{ij}$$
$$=\sup_{i,j\in\mathbb{N}}c_{ij}=\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}c_{ij}=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}c_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{j\to\infty}\mu_j\left(A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)$$

מש"ל.

9. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב -1 ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:

i. $\alpha\in f\left(\mathbb{R}\right)$: אזי מהמונוטוניות של f נקבל כי $\{x\mid f\left(x\right)\geq\alpha\}=[f^{-1}\left(\alpha\right),\infty)$.

ii. $\alpha\notin f\left(\mathbb{R}\right)$: נגדיר את β להיות $\beta=\inf\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$, כאשר $\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$ איננה הקבוצה הריקה . אזי

א. $\beta\in\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$: אזי $\{x\mid f\left(x\right)\geq\alpha\}=[f^{-1}\left(\beta\right),\infty)$.

ב. $\beta\notin\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$: אזי $\{x\mid f\left(x\right)\geq\alpha\}=(f^{-1}\left(\beta\right),\infty)$.

ג. אם $\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$ הינה ריקה אז היא מדידה.

בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה.

10. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $\left|f\right|$ כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את $f=1_E-1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס. ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}\left(1\right)=E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $\left|f\right|=1$ זו כמובן פונקצית אינדיקטור שניתן לרשום $f=1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

11. יהי מרחב מדיד $\left(X,S\right)$ ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות $f_1,\ f_2$ ו f_3 ($f_i:X\to\mathbb{R}$ $\left(i=1,2,3\right)$). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1\left(x\right)t^2+f_2\left(x\right)t+f_3\left(x\right)=0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x\in X$.

הראו כי $A\equiv\{x\in X : the\ equation\ has\ two\ distinct\ roots\}$ הינה מדידה $\mathcal{S}$.

פתרון: נשים לב כי $A=\{x\in X : f_2^{\,2}-4f_1f_3>0\}$ ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל .
וחיבור ולכן $f_2^{\,2}-4f_1f$ הינה פונקציה מדידה $\mathcal{S}$ ומכאן ש $f_2^{\,2}-4f_1f>0$ הינה קבוצה מדידה $\mathcal{S}$.

12. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות $\mathcal{S}$ המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה $\mathcal{S}$.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha<0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}\left(\left(-\infty,\alpha\right)\right)=\{x\in X \mid \frac{f(x)}{g(x)}<\alpha\}$$
$$=\{x\in X \mid f(x)<g(x)\alpha\}\cap\{\mathrm{g}(x)>0\}\bigcup\{x\in X \mid f(x)>g(x)\alpha\}\cap\{\mathrm{g}(x)<0\}$$
$$=\{x\in X \mid f(x)-g(x)\alpha<0\}\cap\{\mathrm{g}(x)>0\}\bigcup\{x\in X \mid f(x)-g(x)\alpha>0\}\cap\{\mathrm{g}(x)<0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f-\alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.