פתרונות (1)

1. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$.

פתרון: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי

$\sigma(\mathfrak{A}_2) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathfrak{A}_2$ מוכלת ב $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, כלומר - $\sigma(\mathfrak{A}_2) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$.

$\sigma(\mathfrak{A}_2) \supseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$: נובע מכך ש $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$.

2. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{E}$ כך ש $A \in \sigma(\mathfrak{D})$.

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש.

פתרון:

א. נסמן ב S קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי S הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E \in \mathcal{E}$, ברור כי $X \in \sigma(E)$ ומכאן ש $X \in S$.

ii. אם $A \in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n \in \mathcal{E}$ וגם $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ מכאן ש $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ ולכן $A^c \in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\{E_n^k\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma(E_k^n, k \in \mathbb{N})$. קל לראות כי אז $\{E_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(E_k^n, n,k \in \mathbb{N})$ ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma(E)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma(E) \subseteq S$ וסיימנו.

3. לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו $a,b\in\mathbb{R}$ מגדירים $aE+b:=\{ax+b:x\in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x\mapsto ax+b$). הוכיחו: $m^*(aE+b)=|a|m^*(E)$.

פתרון: הזזה ראיתם בהרצאה. לכן נראה רק את המקרה $m^*(aE)=|a|m^*(E)$.

המקרה בו $a=0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE=0$. נוכיח ל $a\neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE .

הוכחה:

$\Leftarrow$: הפונקציה $x\mapsto ax$ פתוחה (ההופכית שלה רציפה) ולכן aO קבוצה פתוחה. מצד שני $aO=a(E\cap O)\cup(O/E)=a(E\cup(O/E))=aE\cup a(O/E)$, ומכאן $aE\subseteq aO$. ולכן aO כיסוי פתוח של aE .

$\Rightarrow$: באותו אופן ע"י $x\mapsto\frac{1}{a}x$. מש"ל.

כעת, נשים לב כי $a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n$ ומכאן ש

$$\begin{aligned}
m^*(aE)&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)\mid aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n \text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(aI_n)\mid E\subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|a|l(I_n)\mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=|a|\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)\mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=|a|\mathrm{m}^*(E)
\end{aligned}$$

מש"ל.

4. הגדרה: נאמר שקבוצה $G\subseteq\mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G\in G_\delta$ המקיימת $E\subseteq G$ וכן $m^*(G)=m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E\subseteq O$ וכן

$$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

פתרון:

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$. מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים קטעים $\{I_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = O$, נקבל כי O הינה קבוצה פתוחה המקיימת $m^*(O) \le \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$.

נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש $m^*(O'_m) < m^*(E) + \frac{1}{m}$.

נסמן $O = \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$. זוהי קבוצה ב G_δ. מהמונטוניות של המידה נקבל

$\forall m \in \mathbb{N} \quad m^*(E) \le m^*(O) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m\right) < m^*(E) + \frac{1}{m}$. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון.

5. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x-ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.

ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, הראו כי $m(B) > \delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x-ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן

נקבל שהסדרה $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots$ וגם מתקיים כי $m(E_1)\le 1$ שכן $E_1\subseteq[0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}m(A_k)\ge\delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ נובע כי $\lim_{n\to\infty}m(A_n)=0$. מהסעיף הקודם נובע כי $m(B)\le\lim_{k\to\infty}m(A_k)$ ומכאן ש $m(B)=0$.

ד. ניקח את $A_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)},\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n+1)}\right)$. קל לראות כי $m(A_n)=\frac{1}{(n+1)}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$. מצד שני $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n=A_k$ ולכן

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=0$$

6. יהי $\varepsilon>0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב $\mathbb{R}$. הוכח כי אם מתקיים

$$m(A\cap I)\le(1-\varepsilon)m(I)$$

לכל אינטרוול I אזי $m(A)=0$.

פתרון: נניח תחילה כי $m(A)<\infty$. אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית m^* (שמסכימה עם m לכל קבוצה מדידה בורל) קיימת קבוצה פתוחה O כך ש $A\subset O$ ו $m(O)<\infty$. ניתן לרשום $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר I_n קטעים זרים ופתוחים. נקבל כי

$$m(A\cap O)=m\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap I_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap I_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap I_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)m(A\cap I_n)=(1-\varepsilon)m(A\cap O)$$

מכאן נובע כי $m(A\cap O)=0$ ולכן $m(A)=0$.

עבור המקרה בו $m(A)=\infty$ נתסתכל על $A_i=A\cap[i-1,i]$ עבור $i\in\mathbb{Z}$. ברור כי מתקיים

$$m(A_i\cap I)\le m(A\cap I)\le(1-\varepsilon)m(I)$$

לכל אינטוול I.עפ"י המקרה הקודם נובע כי $m(A_i)=0$. מכאן ש

$$m(A)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap[i-1,i]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=0$$

מש"ל

7. יהי ה (X,S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקצית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית וכך ש $\mu(\varnothing)=0$.
נניח שאם A_n הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$. הראו כי μ הינה מידה.

פתרון: מספיק להראות שאם $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_n E_n\right)=\sum_n\mu(E_n)$

נגדיר סדרה חדשה $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ (סיגמא – אדיטיביות). זוהי סדרה עולה , ומתוך האדיטיביות הסופית של μ נובע כי $\mu(F_n)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$ מתקיים גם ש $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$. ולכן

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

8. נניח ו $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X,S) ו $\mu_n(A)\uparrow$ לכל $A\in S$ אזי $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ברור כי $\mu(A)\ge 0$ לכל $A\in S$ וכי $\mu(\varnothing)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(\varnothing)=0$. נראה כי גם התכונה השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\mu_j\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_j\left(A_n\right)$$

נסמן את הסכומים החלקיים $c_{ij}=\sum_{n=1}^{i}\mu_j\left(A_n\right)$. מתקיים

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_j\left(A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}c_{ij}=\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{i\in\mathbb{N}}c_{ij}$$

$$=\sup_{i,j\in\mathbb{N}}c_{ij}=\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}c_{ij}=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}c_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{j\to\infty}\mu_j\left(A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)$$

מש"ל.

9. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב 1- ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:

i. $\alpha\in f\left(\mathbb{R}\right)$: אזי מהמונוטוניות של f נקבל כי $\{x\mid f\left(x\right)\geq\alpha\}=[f^{-1}\left(\alpha\right),\infty)$.

ii. $\alpha\notin f\left(\mathbb{R}\right)$: נגדיר את β להיות $\beta=\inf\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$, כאשר $\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$ איננה הקבוצה הריקה . אזי

א. $\beta\in\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$: אזי $\{x\mid f\left(x\right)\geq\alpha\}=[f^{-1}\left(\beta\right),\infty)$.

ב. $\beta\notin\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$: אזי $\{x\mid f\left(x\right)\geq\alpha\}=(f^{-1}\left(\beta\right),\infty)$.

ג. אם $\{f\left(x\right)\mid f\left(x\right)>\alpha\}$ הינה ריקה אז היא מדידה.

בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה.

10. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $\left|f\right|$ כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את $f=1_E-1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס. ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}\left(1\right)=E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $\left|f\right|=1$ זו כמובן פונקצית אינדיקטור שניתן לרשום $f=1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

11. יהי מרחב מדיד (X,S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1, f_2 ו f_3 ($f_i : X \to \mathbb{R}$ $(i=1,2,3)$). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x \in X$.

הראו כי $A \equiv \{x \in X : \textit{the equation has two distinct roots}\}$ הינה מדידה S.

פתרון: נשים לב כי $A = \{x \in X : f_2^{\,2} - 4f_1f_3 > 0\}$. ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל וחיבור ולכן $f_2^{\,2} - 4f_1f$ הינה פונקציה מדידה S ומכאן ש $f_2^{\,2} - 4f_1f > 0$ הינה קבוצה מדידה S.

12. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה S .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha < 0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big) = \{x \in X \mid \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha\}$$
$$= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\alpha\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) > g(x)\alpha\} \cap \{g(x) < 0\}$$
$$= \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha < 0\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha > 0\} \cap \{g(x) < 0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f - \alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.