חידה לתרגול 5

חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:

1. $\left\{\frac{a^n}{b^m} \mid n,m\in\mathbb{Z}\right\}\subseteq\mathbb{R}^{>0}$ עבור $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
2. $\mathbb{P}:=\{q\in\mathbb{Z}\mid \text{q is prime}\}\subseteq\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה־p־אדית.

<u>פתרון:</u>

1. נסמן את הקבוצה הנתונה ב־A. ראשית, הפונקציה $f:=\log:\mathbb{R}^{>0}\to\mathbb{R}$ היא הומאומורפיזם ולכן $cl(A)=f^{-1}(cl(f(A))$ (קל לראות שזה נכון לפי קריטריון הרציפות האחרון שלמדנו בכיתה). נשים לב ש־

$$f(A)=\{n\log a-m\log b\mid n,m\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}\log a+\mathbb{Z}\log b$$

כעת, אנחנו טוענים ש־$\log a$ ו־$\log b$ הם בלתי תלויים רציונלית, כלומר שלא קיימים רציונלים לא טריוויאלים $p,q\in\mathbb{Q}$ כך ש־

$$p\log a+q\log b=0$$

אם היו כאלה, אז בלי הגבלת הכלליות $p\neq 0$ ולכן אפשר לרשום

$$\log a=\frac{q}{p}\log b\Rightarrow a=e^{\frac{p}{q}b}\in\mathbb{N}$$

שימו לב ש־$\frac{p}{q}b\in\mathbb{Q}$. לפי משפט לינדמן־ויירשטראס (חפשו בוויקיפדיה), זה לא הגיוני כי כל חזקה רציונלית של e היא טרנסדנטלית. הסתירה מוכיחה ש־$\log a$ ו־$\log b$ הם אכן בלתי תלויים רציונלית. לפי משפט קרונקר (חפשו בוויקיפדיה באנגלית), מתקיים ש־$\mathbb{Z}\log a+\mathbb{Z}\log b$ צפוף ב־$\mathbb{R}$. לכן,

$$cl(A)=f^{-1}(cl(f(A))=f^{-1}(cl(\mathbb{Z}\log a+\mathbb{Z}\log b))=f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{>0}$$

כלומר הקבוצה A צפופה.

2. ראשית, קל לראות שאם $n\in p\mathbb{Z}\setminus\{p\}$ אז ל־ $\varepsilon>0$ קטן מספיק מתקיים ש־ $B(n,\varepsilon)\subseteq p\mathbb{Z}\setminus\{p\}$. לכן,

$$p\mathbb{Z}\setminus\{p\}\subseteq cl(\mathbb{P})^c$$

מנגד ברור ש־$p\in\mathbb{P}$. בנוסף, לכל $b\notin p\mathbb{Z}$ מתקיים ש־b זר ל־p^n לכל $n\in\mathbb{N}$. לפי משפט דריכלה (חפשו בויקיפדיה), $b+p^n\mathbb{Z}$ מכילה אינסוף ראשוניים, ובפרט

$$(b+p^n\mathbb{Z})\cap\mathbb{P}\neq\emptyset$$

לפי הגדרה, $b\in cl(\mathbb{P})$. לפי הכלה דו כיוונית, $cl(\mathbb{P})=\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}\cup\{p\}$.