תורת הקבוצות — תרגיל בית 1

חיים שרגא רוזנר

כ"א באדר, תשע"ה*

תקציר

סדר מלא, סדר טוב, יחס נורש ותכונות נורשות, $\in$־טרנזיטיביות, איחוד של קבוצה, חיתוך של קבוצה, סודר.

תזכורות

1. יחסים וסדרים

- יחס R על קבוצה A הוא:

  אנטי־רפלקסיבי אם לכל $a \in A$, מתקיים $(a,a) \notin R$.

  טרנזיטיבי אם לכל $a,b,c \in A$, מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to aRc$.

  טריכוטומי אם לכל $a,b \in A$ מתקיים $aRb \vee bRa \vee a = b$.

  יחס סדר קווי (בקיצור: סדר) אם הוא אנטי־רפלקסיבי, טרנזיטיבי וטריכוטומי.

- יהי R סדר של הקבוצה A. נאמר שהאיבר $a \in A$ הוא **איבר ראשון** ב־A, אם לכל $b \in A$, מתקיים $a < b \vee a = b$.

- סדר קווי R על קבוצה A הוא **סדר טוב** עליה אם לכל תת־קבוצה לא ריקה $\varnothing \neq B \subseteq A$ יש איבר ראשון.

- יהי R יחס על קבוצה A, ותהי A' תת־קבוצה של A. נגדיר על A' את **היחס הנורש** מ־A על ידי $R' := R \cap A' \times A'$. בדרך כלל לא נציין שאנו עוסקים ביחס הנורש, אלא נדבר על היחס R בהקשר לקבוצה A'. כל התכונות שמנינו לעיל הן **תכונות נורשות**, דהיינו אם R מקיים תכונה כלשהי מאלה, כיחס על A, אז R' מקיים את אותה התכונה על A'.

2. קבוצות

- קבוצה A היא **$\in$־טרנזיטיבית** אם לכל $a \in A$ ולכל $b \in a$ מתקיים $b \in A$.
- תהי A קבוצה. נסמן את ה**איחוד** שלה על ידי

$$\bigcup A := \{x \colon \exists y \in A,\, x \in y\}$$

קיצורים מקובלים: $\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup \{A_i \colon i \in I\}$, $A \cup B := \bigcup \{A, B\}$.

*להגשה עד יום חמישי ו' בניסן (26 במרץ) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

- תהי A קבוצה לא ריקה. נסמן את **החיתוך** שלה על ידי

$$\bigcap A := \{x \colon \forall y \in A,\, x \in y\}$$

קיצורים מקובלים דומים לקיצורי האיחוד.

- קבוצה A היא **סודר** אם היחס $\in$ הוא יחס סדר טוב עליה ואם היא $\in$־טרנזיטיבית.
- 0 הוא מספר טבעי בקורס שלנו. הגדרות מדויקות למושגים כמו: אפס, מספר טבעי, קבוצה סופית, קבוצה אינסופית — מתוכננו, להגיע במהלך הקורס, יש למה לחכות. אולי אפילו נגדיר מה היא קבוצה.

1 סדרים

1. תהי A קבוצה סדורה היטב, ונניח כי $f \colon A \to B$ היא פונקציה על. מצאו סדר טוב על B.

2. יהיו A, B קבוצות סדורות היטב. נגדיר את **הסדר המילוני** על $A \times B$ בצורה הבאה: $(a_1, b_1) <_{\text{lex}} (a_2, b_2)$ אם $a_1 <_A a_2$, או אם $a_1 = a_2$ וכן $b_1 <_B b_2$.

   הוכיחו שהסדר המילוני הוא סדר טוב.

   הערה ניתן להכליל בניה זו באופן רקורסיבי למכפלה קרטזית מכל אורך סופי.

3. הסדר המילוני על קבוצת הסדרות האינסופיות של אפסים ואחדים

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_0, a_1, \dots) \colon \forall n,\, a_n \in \{0,1\}\}$$

מוגדר בצורה הבאה: $(a_0, a_1, \dots) < (b_0, b_1, \dots)$ אם ורק אם: יש מספר טבעי n כך ש־$(a_0, \dots, a_{n-1}) = (b_0, \dots, b_{n-1})$, וכן $a_n < b_n$.

קל לראות שהסדר הזה הוא מלא. הוכיחו שסדר זה אינו טוב.[1]

2 קבוצות

1. תהי A קבוצה לא ריקה של קבוצות $\in$־טרנזיטיביות. הראו כי $\bigcup A$ ו־$\bigcap A$ גם הן $\in$־טרנזיטיביות.

2. תהי A קבוצה. הראו כי התכונות הבאות שקולות:

   (א) A היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית.

   (ב) לכל $B \in A$, מתקיים $B \subseteq A$.

   (ג) $\bigcup A \subseteq A$.

3. עבור קבוצה A, נגדיר ברקורסיה על המספרים הטבעיים:

   (א) $A_0 := A$.

[1] שימו לב! אנו משתמשים כאן בכך שהסדרות אינסופיות; אילו הסדרות היו סופיות, הסדר היה נשאר טוב, לפי אינדוקציה מהתרגיל הקודם.

(ב) עבור n ,$0 < n$.$A_{n+1} \coloneqq A_n \cup \bigcup A_n$

נסמן את **הסגור הטרנזיטיבי** (transitive closure) של A על ידי $\mathrm{tc}(A) \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

הוכיחו: $\mathrm{tc}(A)$ היא הקבוצה ה־$\in$־טרנזיטיבית הקטנה ביותר (מבחינת הכלה) המכילה את A. (לפניכם שלוש טענות: $\mathrm{tc}(A)$ היא $\in$־טרנזיטיבית, מכילה את A, ולכל קבוצה $\in$־טרנזיטיבית B המכילה את A מתקיים $\mathrm{tc}(A) \subseteq B$.)

4. נתון ש־A היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, המקיימת $\{\{\varnothing\}\} \in A$. מצאו דוגמא לקבוצה A שכזו, והראו כי A איננה סודר. היעזרו בשני התרגילים הקודמים.

5. יהי α סודר. נסמן $S(\alpha) \coloneqq \alpha \cup \{\alpha\}$. הראו כי $\in$ הוא סדר טוב על $S(\alpha)$. נזכיר כי בשיעור הראינו ש־$S(\alpha)$ היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, ובהוכחה זו תשלימו את הטענה כי $S(\alpha)$ הוא סודר בפני עצמו.

ב ה צ ל ח ה!